

# Testul 18

## Subiectul I

1. Determinați cel mai mic număr natural mai mic decât  $\frac{6}{\sqrt{10}-2}$ . (5 p.)
2. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ . (5 p.)
3. Arătați că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - 2x$  este inversabilă. (5 p.)
4. Determinați  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $C_{n+2}^2 = 21$ . (5 p.)
5. Fie  $ABCD$  un paralelogram și  $O$  intersecția diagonalelor.  
Arătați că  $\overline{AO} + \overline{BO} = \overline{OC} + \overline{OD}$ . (5 p.)
6. Calculați  $\sin^2 40^\circ + \cos^2 140^\circ$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Considerăm sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = -1 \\ x + z = a \end{cases}$$
 unde  $a \in \mathbb{R}$ .
  - a) Arătați că sistemul este compatibil, oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ . (5 p.)
  - b) Rezolvați sistemul pentru  $a = -1$ . (5 p.)
  - c) Determinați valorile lui  $a \in \mathbb{R}$  pentru care soluția  $(x_0, y_0, z_0)$  verifică  $(x_0 - y_0)(y_0 - z_0)(z_0 - x_0) = 0$ . (5 p.)
2. Fie  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  corpul claselor de resturi modulo 7.
  - a) Calculați produsul elementelor nenule ale corpului  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ . (5 p.)
  - b) Rezolvați ecuația  $x^2 + \hat{3}x + \hat{3} = \hat{0}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_7$ . (5 p.)
  - c) Arătați că funcția  $f: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ ,  $f(x) = x^5 + \hat{4}x$  nu este injectivă. (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$ .
  - a) Calculați limitele laterale ale lui  $f$  în punctul  $x_0 = -2$ . (5 p.)
  - b) Determinați ecuația asimptotei oblice a graficului funcției  $f$  spre  $-\infty$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $f$  este convexă pe  $(-\infty, -2)$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} ax - 1, & x < 1 \\ \ln x + x, & x \geq 1 \end{cases}$ , unde  $a$  este un număr real.
  - a) Calculați  $\int_1^e F(x) dx$ . (5 p.)
  - b) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care funcția  $F$  este primitivă a unei funcții  $f$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\int_1^e \frac{x+1}{xF(x)} dx$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.