Testul 17

Subiectul I

1. Calculați a^2+b^2 știind că $a-b=3$ și $ab=4$. **(5 p.)**

2. Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$, $g(x)=2-3x$.

Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $|f(x)-g(x)|=|f(x)+g(x)|$. **(5 p.)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+7)=4$. **(5 p.)**

4. Fie mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$ și $C=A-B$.
Determinați numărul tuturor submulțimilor lui C. **(5 p.)**

5. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că dreapta de ecuație $mx+(m+1)y+5=0$

are panta egală cu 2. **(5 p.)**

6. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB=AC=2$ și $A=30°$. Calculați BC. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2. **(5 p.)**

b) Arătați că matricea I_2+2A este inversa matricei I_2-2A. **(5 p.)**

c) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A-xI_2)=4$. **(5 p.)**

2. Fie $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8 și $H=\{x^3\mid x\in\mathbb{Z}_8\}$.

a) Rezolvați ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$, $x\in\mathbb{Z}_8$. **(5 p.)**

b) Determinați suma elementelor mulțimii H. **(5 p.)**

c) Rezolvați ecuația $x^3=\hat{3}$, $x\in\mathbb{Z}_8$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6e^x-x^3-3x^2$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$. **(5 p.)**

b) Arătați că f este funcție convexă. **(5 p.)**

c) Determinați numărul punctelor de extrem ale lui f. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

a) Calculați $\int_{-1}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x$. **(5 p.)**

b) Aflați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox. **(5 p.)**

c) Calculați $\int_0^2 x^3f(x)\,\mathrm{d}x$. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.