

# Testul 16

## Subiectul I

1. Calculați  $|a-1|+|a+1|$  pentru  $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$ .  
Determinați cel mai mic număr întreg  $a$  pentru care  $f(a) + f(a+1) + f(a+2) > 0$ . (5 p.)
3. Rezolvați inecuația  $\log_2(x+1) < 4$ . (5 p.)
4. Funcția  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$  este inversabilă. Calculați  $f(1) + f(2) + f(3)$ . (5 p.)
5. Considerăm dreptunghiul  $ABCD$  de arie 12 și având  $AB = 3$ .  
Calculați lungimea vectorului  $\overline{DC} + \overline{DA}$ . (5 p.)
6. Fie  $x$ ,  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ . Arătați că  $\sin x \cdot \sin(180^\circ - x) \geq 0$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Considerăm matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculați  $\det A$ . (5 p.)
  - b) Arătați că  $A^2 = A'$ , unde  $A'$  este transpusa matricei  $A$ . (5 p.)
  - c) Determinați valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $\det(A + A^2 + mA^3) = 0$ . (5 p.)
2. Pe mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$  se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y + 4$  și  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ .
  - a) Arătați că  $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ . (5 p.)
  - b) Arătați că dacă  $x \circ y = -4$  atunci  $x = -4$  sau  $y = -4$ . (5 p.)
  - c) Rezolvați ecuația  $(x \circ x) \circ x = (x * x) * x$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ , unde  $a$  este un număr real.
  - a) Determinați ecuația asimptotei  $+\infty$  a graficului funcției  $f$ . (5 p.)
  - b) Arătați că nu există  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $f$  este descrescătoare. (5 p.)
  - c) Pentru  $a = 0$ , determinați punctele de extrem ale funcției  $f$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x + e^x}{x^2 + e^x + 3}$ .
  - a) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $\int_0^1 x f'(x) dx$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.