Testul 15

Subiectul I

1. Calculați $x+y$ știind că numerele 1, 4, x, y, sunt în progresie aritmetică. **(5 p.)**

2. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x+y=6$ și $xy=8$. **(5 p.)**

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x(2^x+1)=6$. **(5 p.)**

4. Determinați numărul tuturor submulțimilor mulțimii $A=\{1,2\}\times\{3,4,5\}$. **(5 p.)**

5. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ știind că triunghiul ABC este echilateral de latură 2. **(5 p.)**

6. Fie MNP un triunghi dreptunghic cu catetele $MN=4$ și $MP=5$. Calculați $\sin(\sphericalangle MNP)$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Scrieți o matrice din M având determinantul egal cu 3. **(5 p.)**

b) Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Arătați că $A+A^{-1}\in M$. **(5 p.)**

c) Demonstrați că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$. **(5 p.)**

2. Fie mulțimea $M=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ și legea de compoziție „$*$" definită pe $\mathbb{R}$

prin $x*y=xy-4x-4y+a$, unde a este un număr real.

a) Determinați valoarea reală a lui a pentru care „$*$" este lege de compoziție pe M. **(5 p.)**

b) Pentru $a=20$ arătați că M este grup în raport cu legea „$*$". **(5 p.)**

c) Determinați valoarea reală a lui a pentru care funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=x+4$ are proprietatea $f(x\cdot y)=f(x)*f(y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$. $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

a) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f. **(5 p.)**

b) Arătați că ecuația $f(x)=\dfrac{4}{5}$ nu are soluții. **(5 p.)**

c) Demonstrați că $x-y\ge \ln\dfrac{x+1}{y+1}$, oricare ar fi x, y cu $x\ge y>0$. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f: [1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x(1+\ln x)}$.

a) Determinați primitiva F a funcției f cu $F(1)=2$. **(5 p.)**

b) Calculați $\int_1^e f(x)\,dx$. **(5 p.)**

c) Arătați că orice primitivă a lui f este funcție concavă. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.