

# Testul 14

## Subiectul I

1. Determinați al șaselea termen al progresiei geometrice  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ . (5 p.)
2. Rezolvați inecuația  $x^2 - 3x + 2 > 0$  în mulțimea numerelor reale. (5 p.)
3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 2^x = 6$ . (5 p.)
4. Calculați  $C_{12}^3 - A_{11}^1$ . (5 p.)
5. Determinați  $m \in \mathbb{R}$  pentru care dreptele  $d_1: x + my = 1$  și  $d_2: mx + 4y = 5$  sunt paralele. (5 p.)
6. Aflați înălțimea din  $A$  în triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  și  $BC = 10$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Considerăm determinantul  $\Delta(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculați  $\Delta = (0, 1, 0)$ . (5 p.)
  - b) Determinați  $x \in \mathbb{R}$  știind că  $\Delta(x, 1, -1) = 0$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $\Delta = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și mulțimea  $G_f = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ .
  - a) Arătați că dacă  $T_1, T_2 \in G_f$  atunci  $T_1 + T_2 \in G_f$ . (5 p.)
  - b) Demonstrați că  $G_f$  este grup abelian în raport cu operația de adunare a numerelor reale. (5 p.)
  - c) Determinați mulțimea  $G_f$  pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + x + 1$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ .
  - a) Arătați că graficul funcției  $f$  nu are asimptote. (5 p.)
  - b) Demonstrați că  $f$  este crescătoare. (5 p.)
  - c) Arătați că există  $c \in (9, 16)$  astfel încât  $f(c) = 3$ . (5 p.)
2. Fie funcțiile  $f_1, f_2: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{e^x}{x+1}$  și  $f_2(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$ .
  - a) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f_2(x)}{e^x}$  în jurul axei  $Ox$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $\int_1^2 \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)^2 dx$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.