

Testul 13

Subiectul I

1. Calculați ${}^3\sqrt{4} \cdot {}^3\sqrt{2} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{54} - 20$. (5 p.)
2. Punctul de extrem al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - mx + 1$ este $x = 2$.
Aflați m . (5 p.)
3. Calculați $\lg(x+y) + \lg(x-2y)$ pentru $x = 7$ și $y = 3$. (5 p.)
4. Calculați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale mulțimii $\{a, b, c, d\}$. (5 p.)
5. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că distanța dintre punctele $A(a, 1)$ și $B(0, -4)$ este egală cu 5. (5 p.)
6. Fie ABC un triunghi cu $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 4$. Calculați $\cos A$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = c + d = 1 \right\}$.
 - a) Scrieți o matrice din mulțimea A . (5 p.)
 - b) Arătați că inversa matricei $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparține lui A . (5 p.)
 - c) Demonstrați că dacă $X, Y \in A$, atunci $XY \in A$. (5 p.)
2. Fie mulțimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 - a) Arătați că $A(k) \cdot A(p) = A(k+p)$ oricare ar fi numerele întregi k și p . (5 p.)
 - b) Arătați că G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor pătrate de ordinul 3. (5 p.)
 - c) Determinați matricele $X \in G$ cu proprietatea că $X^4 = \begin{pmatrix} 81 & 80 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax, & x \in (-\infty, 0) \\ x + \ln(1+x), & x \in [0, \infty) \end{cases}$.
 - a) Arătați că f este continuă. (5 p.)
 - b) Determinați mulțimea valorilor numărului real a pentru care f este crescătoare. (5 p.)
 - c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(x+1))$. (5 p.)
2. Pentru fiecare număr natural n se definește funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot e^x$.
 - a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele $x = -1$, $x = 0$. (5 p.)
 - b) Arătați că $\int_0^1 f_{n+1}(x) + (n+1) \int_0^1 f_n(x) dx = e$. (5 p.)
 - c) Calculați $\int_{-1}^1 \frac{f_1(x)}{1+e^x} dx$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.