Testul 12

Subiectul I

1. Calculați $\log_2\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}-1\right)$. **(5 p.)**

2. Fie x_1 și x_2 rădăcinile reale ale ecuației $x^2-x-1=0$.
Calculați $(2x_1-1)(2x_2-1)$. **(5 p.)**

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}=27^{2x}$. **(5 p.)**

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{10, 11, 12, 13, \ldots, 98, 99\}$, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 6. **(5 p.)**

5. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că punctul $P(a+1, a-1)$ aparține dreptei de ecuație $x+2y+5=0$. **(5 p.)**

6. Fie a suplementul unghiului de 30°. Calculați $\cos a$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și funcția $f: M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R}),\ f(A)=AX$.

a) Calculați $f(A)$. **(5 p.)**

b) Arătați că dacă matricea $B\in M_2(\mathbb{R})$ are proprietatea că $f(B)=O_2$ atunci $B=O_2$. **(5 p.)**

c) Determinați $C\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(C)=I_2$. **(5 p.)**

2. Fie mulțimea $M=\{a+b\sqrt{7}\mid a^2-7b^2=1,\ a, b\in\mathbb{Z}\}$.

a) Verificați dacă $8-3\sqrt{7}$ aparține mulțimii M. **(5 p.)**

b) Arătați că pentru orice $x, y\in M$ rezultă că $xy\in M$. **(5 p.)**

c) Demonstrați că M este grup în raport cu operația de înmulțire a numerelor reale. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+2$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$. **(5 p.)**

b) Determinați cel mai mare număr real strict pozitiv a cu proprietatea că f este descrescătoare pe intervalul $[-a, a]$. **(5 p.)**

c) Arătați că pentru orice $m\in(0, 4)$, ecuația $f(x)=m$ are trei soluții distincte. **(5 p.)**

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^n}{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f_3(x)\,dx$. **(5 p.)**

b) Arătați că $\int_0^1 f_{n+2}(x)\,dx=\frac{1}{n+1}-\int_0^1 f_n(x)\,dx$. **(5 p.)**

c) Arătați că $\frac{1}{2(n+1)}\le\int_0^1 f_n(x)\,dx\le\frac{1}{2(n-1)}$, oricare ar fi numărul natural $n, n\ge 2$. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.