Testul 11

Subiectul I

1. Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_4 = 5$ şi $a_9 = 30$. Determinaţi a_1. **(5 p.)**

2. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1,\ g(x) = 3 + 2x$. Rezolvaţi inecuaţia

$f(x^2) \leq g(x) - f(2)$. **(5 p.)**

3. Rezolvaţi ecuaţia $\log_2 x + \log_2 3 = \log_3 27$. **(5 p.)**

4. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $C_{n+1}^{n-1} = 5C_n^1$. **(5 p.)**

5. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{w} = -3\vec{i} + (m+1)\vec{j}$

au aceeaşi direcţie. **(5 p.)**

6. În triunghiul ABC avem $AB = 5$, $AC = 1 + AB$ şi $B = 30°$. Calculaţi $\sin C$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ şi $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ transpusa ei.

a) Calculaţi ad ştiind că $bc = 2$ şi $\det A = -1$. **(5 p.)**

b) Calculaţi $A \cdot A^t$. **(5 p.)**

c) Demonstraţi că suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este un număr mai mare sau egal decât 0. **(5 p.)**

2. Pe intervalul $(\sqrt{3}, \infty)$ se defineşte legea $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 12}$.

a) Arătaţi că $x * y = \sqrt{(x^2-3)(y^2-3)+3}$, oricare ar fi $x \in (\sqrt{3}, \infty)$. **(5 p.)**

b) Demonstraţi că intervalul $(\sqrt{3}, \infty)$ este grup în raport cu legea „*". **(5 p.)**

c) Rezolvaţi ecuaţia $x*x*x = 2$, $x \in (\sqrt{3}, \infty)$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \ln 3 - 3 \ln x$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. **(5 p.)**

b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f. **(5 p.)**

c) Arătaţi că $f(x) \geq 3 - 2x$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. **(5 p.)**

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

a) Calculaţi $\int_1^2 f(x)\,dx$. **(5 p.)**

b) Arătaţi că orice primitivă a lui f pe $(0, \infty)$ are asimptotă spre $+\infty$. **(5 p.)**

c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei

$g : [2, 3] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[4]{\dfrac{f(x)}{2x+1}}$, în jurul axei Ox. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.