Testul 10

Subiectul I

1. Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că numerele $1-x$, $2x$ și -16 sunt în progresie geometrică. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (1-x)^2 - x^2$. Rezolvați inecuația $f(x) + f(1) \leq f(2)$. **(5 p.)**

3. Calculați $\log_{16}4 + \log_4 2$. **(5 p.)**

4. Determinați al patrulea termen al dezvoltării $(1+2x)^7$. **(5 p.)**

5. Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1, 2)$ și are panta 2. **(5 p.)**

6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB = 10$, $AC = 15$ și $A = 60°$ **(5 p.)**

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2. **(5 p.)**

b) Determinați o matrice coloană $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel ca $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A - xI_3) = 0$. **(5 p.)**

2. Fie mulțimea $G = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Calculați $M(2)M(3)$. **(5 p.)**

b) Arătați că G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor pătratice de ordinul 2 cu coeficienți întregi. **(5 p.)**

c) Arătați că funcția $f: \mathbb{Z} \to G, f(x) = M(x)$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ la grupul $(G, \cdot)$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ e^x + \ln(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases}$, unde a este un număr real.

a) Determinați ecuația tangentei la graficul lui f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 1$. **(5 p.)**

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care f este derivabilă în punctul $x_1 = 0$. **(5 p.)**

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{3^x + e^x}$. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - 2\dfrac{x-1}{x+1}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$. **(5 p.)**

b) Arătați că dacă F este o primitivă a lui f, atunci $F(x) \leq F(x^2)$, oricare ar fi $x \in [1, \infty)$. **(5 p.)**

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.