EXERCITIUL DAT la examen 2021

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)\,dx=18$.

b) Arătați că $\int_1^3 x f(x)\,dx=4+\ln 5$.

c) Demonstrați că $F(x+1)\ge F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

TESTELE antrenament:

Model

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (4-f^2(x))\,dx=\pi$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(\sqrt{2}-1)$.

c) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}\,dx=\ln(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4)$.

Test1

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sin x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x}\,dx=e(e-1)$.

b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

c) Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}\,dx=-\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$.

Test2

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2xe^x-2x+1}{x}$.

a) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+2e^x-2x+2021$ este o primitivă a funcției f.

b) Arătați că $\int_1^e f(x)\,dx=2e^e-4e+3$.

c) Calculați $\int_1^2 x f(x)\,dx$.

Test3

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}$.

a) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2x+\dfrac{1}{x}-4\ln(x+2)$ este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_1^2 (x+2)f(x)\,dx$.

c) Determinați numărul real m, $m>2$, astfel încât $\int_2^m f(x)\,dx=2m+\dfrac{1}{m}-\dfrac{17}{2}$.

Test4

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1+x\sqrt{x}}{x^2}$.

a) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

b) Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)\,dx$.

c) Determinați numărul real m, $m\in(0,1)$, pentru care $\int_m^1 f^2(x)g(x)\,dx=\dfrac{1}{3}$.

Test5

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

a) Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=16$.

b) Calculați $\int_1^3 f(x)\,dx$.

c) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.

Test6

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

a) Arătați că $\int_0^1 \dfrac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$.

b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

c) Arătați că $\int_1^2 \dfrac{1}{x(x+2)}f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{e-1}{2e^2}$.

Test7

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^n+1}{x^2+1}$, unde n este număr natural nenul.

a) Pentru $n=3$, se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^2+1\right)f(x)$. Determinați primitiva G a funcției g pentru care $G(0)=2021$.

b) Pentru $n=1$, calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Demonstrați că $\dfrac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(x)\,dx\le 1$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Test8

2. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x+4}$.

a) Arătaţi că $\int_0^2 (x+4)f(x)dx=6$.

b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Arătaţi că $\int_0^n f(x)e^{-x}dx<1$, pentru orice număr natural nenul n.

Test9

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

a) Arătaţi că $\int_0^{\pi} f(x)dx=2$.

b) Calculaţi $\int_0^{\pi} xf(x)dx$.

c) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 f^2(x)dx$.

Test10

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+e^x$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^0 f(x)dx=-\dfrac{1}{e}$.

b) Calculaţi $\int_0^1 x f\left(x^2\right)dx$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^2 x^n\left(f(x)-2x\right)dx$. Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Test11

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$.

a) Arătați că $\int_0^1 2f(x)dx=3$.

b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x)dx$.

c) Demonstrați că $\int_0^e f\left(e^x\right)dx \le \int_0^e e^{f(x)}dx$.

Test12

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$.

a) Arătați că $\int_1^4 f^4(x)dx=21$.

b) Calculați $\int_0^1 f\left(e^x\right)dx$.

c) Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)}dx=2e^2$.