

**EXERCITIUL DAT la examen 2021**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 2(x + y) + 6$ .

1. Arătați că  $(-2) * 2 = 2$ .
2. Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Demonstrați că  $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
4. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(x + 1) * x = 4$ .
5. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $2^{2x} * 2^x = 2$ .
6. Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $(x - 1) * x \leq 2$ .

**TESTELE antrenament:**

**Model**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 3xy + 7(x + y) + 14$ .

1. Arătați că  $(-3) * 3 = -13$ .
2. Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Arătați că  $x * y = 3\left(x + \frac{7}{3}\right)\left(y + \frac{7}{3}\right) - \frac{7}{3}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
4. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * x = x$ .
5. Arătați că  $x * \frac{1}{x} \geq 31$ , pentru orice număr real  $x$ ,  $x > 0$ .
6. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $3^x * 3^x = 83$ .

**Test1**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 2(x + y) + 6$ .

1. Arătați că  $(-2) * 2 = 2$ .
2. Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Demonstrați că  $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
4. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(x + 1) * x = 4$ .
5. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $2^{2x} * 2^x = 2$ .
6. Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $(x - 1) * x \leq 2$ .

**Test2**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy - 4(x + y) + 20$ .

1. Arătați că  $4 * 2021 = 4$ .
2. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Demonstrați că  $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
4. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * (x - 4) = x$ .
5. Arătați că  $x * y \geq 8$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ , cu  $x \geq 6$  și  $y \geq 6$ .
6. Calculați  $1^2 * 2^2 * 3^2 * \dots * 2021^2$ .

### Test3

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + 2^{xy} - 1$ .

1. Arătați că  $1 * 3 = 11$ .
2. Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Determinați numărul real  $a$  pentru care  $a * 1 = (-1) * (-a)$ .
4. Arătați că  $x * \frac{1}{x} \geq 3$ , pentru orice număr real  $x$ ,  $x > 0$ .
5. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * (3x) = (4x - 1) * 1$ .
6. Arătați că, pentru orice număr natural nenul  $n$ , numărul  $N = n * (n + 1)$  este natural par.

### Test4

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x - y + 1)(y - x + 1)$ .

1. Arătați că  $(-1) * 4 = -24$ .
2. Arătați că  $x * y = 1 - (x - y)^2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
3. Arătați că  $x * (x - 1) = 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
4. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ .
5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x * 2^{x-1} = 1 - 2^{4040}$ .
6. Determinați numărul real  $x$ ,  $x > 0$ , pentru care  $\left(\lg x * \lg \frac{x}{10}\right) * \left(\lg \frac{x}{10} * \lg \frac{x}{100}\right) = x * 1$ .

### Test5

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6$ .

1. Arătați că  $1 \circ 5 = 1$ .
2. Arătați că  $x \circ y = 5(x-1)(y-1) + 1$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
3. Arătați că  $e = \frac{6}{5}$  este elementul neutru al legii „ $\circ$ ”.
4. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $\frac{4}{5} \circ x = \frac{6}{5}$ .
5. Determinați perechile  $(a, b)$  de numere naturale pentru care  $a \circ b = 21$ .
6. Calculați  $\frac{5}{1} \circ \frac{5}{2} \circ \frac{5}{3} \circ \dots \circ \frac{5}{9}$ .

## SIMULARE

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1$ .

1. Arătați că  $2 * (-5) = -2$ .
2. Verificați dacă  $e = 3$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
3. Determinați numărul real  $a$  pentru care  $a * 5 = 3$ .
4. Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $x * (1-x) \geq -5$ .
5. Arătați că există o infinitate de numere naturale  $n$  pentru care numărul  $N = (\sqrt{n} + 1) * (\sqrt{n} + 1)$  este natural par.
6. Determinați tripletele  $(m, n, p)$  de numere naturale, cu  $m < n < p$ , pentru care  $m * n * p = 8$ .

## Test6

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ .

1. Arătați că  $1 \circ (-2) = -9$ .
2. Arătați că  $x \circ y = (x+y)(x-y)^2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
3. Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă.
4. Arătați că  $x \circ (-x) = 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
5. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(2x) \circ x = 24$ .
6. Determinați numerele naturale  $m$  și  $n$ , cu  $m > n$ , pentru care  $m \circ n = 9$ .

## Test7

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 6 - x - y$ .

1. Arătați că  $5 * 2021 = -2020$ .
2. Arătați că  $(1 * x) * 1 = x$ , pentru orice număr real  $x$ .
3. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $(x + 1) * (4x) = 15$ .
4. Arătați că  $(x * y) * (z * t) = x + y + z + t - 6$ , pentru orice numere reale  $x, y, z$  și  $t$ .
5. Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $x^2 * (-x) \geq 0$ .
6. Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $(2^{n^2} * 2^{n^2}) * (2^{n^2} * 2^{n^2}) = 2$ .

### Test8

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 4(x + y) - 2xy$ .

1. Arătați că  $(-2) \circ 3 = 16$ .
2. Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă.
3. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(1 - x) \circ x = 8$ .
4. Determinați cel mai mic număr natural  $n$  pentru care  $1 \circ n \geq 2021$ .
5. Determinați numărul întreg  $a$  pentru care numărul  $A = a \circ \sqrt{2}$  este întreg.
6. Se consideră numerele reale  $x, y$  și  $z$ , termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Arătați că, pentru orice număr real  $m$ , numerele  $x \circ m, y \circ m$  și  $z \circ m$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

### Test9

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 6x + 6y - 3xy - 10$ .

1. Arătați că  $1 * 2 = 2$ .
2. Arătați că  $x * y = 2 - 3(x - 2)(y - 2)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
3. Arătați că  $e = \frac{5}{3}$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
4. Determinați numerele naturale  $n$  pentru care numărul  $N = 5 * n$  este natural.
5. Calculați  $(-10) * (-9) * (-8) * \dots * 10$ .
6. Determinați numerele reale nenule  $x$  pentru care  $\frac{1}{x} * (x^2 + 2) = 5$ .

### Test10

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y$ .

1. Arătați că  $(-1) * 2 = 5$ .
2. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Arătați că  $(-x) * x = 3x^2$ , pentru orice număr real  $x$ .
4. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * 1 = 3$ .
5. Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale, cu  $m < n$ , pentru care  $m * m = n * n$ .
6. Determinați numerele reale  $x$ ,  $x > 0$ , pentru care  $\lg x * \lg \frac{1}{x} = 9 \lg x$ .

### Test11

Pe mulțimea  $M = [0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{x + y + 6}{xy + 1}$ .

1. Arătați că  $1 * 2 = 3$ .
2. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Arătați că  $x * 1 > 1$ , pentru orice  $x \in M$ .
4. Determinați numărul  $x \in M$  pentru care  $3 * x = \frac{1}{2}$ .
5. Determinați  $x \in M$  pentru care  $x * x \geq 2$ .
6. Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale, cu  $m < n$ , pentru care  $m * n = 1$ .

### Test12

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 9xy + x + y$ .

1. Arătați că  $1 * 2 = 21$ .
2. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
3. Arătați că  $e = 0$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
4. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $(-1) * x = 15$ .
5. Determinați simetricul elementului  $x = 1$  în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
6. Determinați numerele naturale  $n$  pentru care  $N = \frac{1}{3} * n * \frac{2}{3}$  este număr natural de două cifre.