EXERCITIUL DAT la examen 2021

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right)$.

a) Arătați că $2 * 0 = 2$.

b) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a \le b$, atunci $a * b = b$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) * \left(x^2 + 1\right) * (-2x) = 10$.

TESTELE antrenament:

Model

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

a) Arătați că $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$.

b) Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

c) Demonstrați că funcția $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $f(x) = \hat{4} \circ x$ este bijectivă.

Test1

2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Arătați că $3 * 4 = 5$.

b) Determinați $x \in M$ pentru care $x * \sqrt{5} < x + 1$.

c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m, n și $m * n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Test2

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

a) Arătați că $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$.

b) Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

c) Demonstrați că funcția $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $f(x) = \hat{4} \circ x$ este bijectivă.

Test3

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = |x - y|$.

a) Arătați că $(5*2)*1 = 2$.

b) Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă.

c) Demonstrați că $(a*b)+(b*c) \geq a*c$, pentru orice numere reale a, b și c.

Test4

2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x * y = x^y$.

a) Arătați că $2*4 = 4*2$.

b) Arătați că legea de compoziție „$*$" **nu** este comutativă.

c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2*2)*n < 64$.

Test5

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.

a) Arătați că $\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $(x*(-x))*((-x)*x) = 24x$.

c) Demonstrați că $x * \frac{1}{x} \geq 6$, pentru orice număr real nenul x.

SIMULAREA

2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_2\left(2^x + 2^y - 1\right)$.

a) Arătați că $0 * 2021 = 2021$.

b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

c) Determinați $x \in M$ pentru care $x*(x+1)*(x+2) = \log_2 54$.

Test6

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.

a) Arătați că $(2+i)\circ(2-i) = 9$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, numărul $A = (-1+(a+1)i)\circ(-1+(a-1)i)$ este real strict mai mic decât 0.

c) Determinați numerele complexe z pentru care $z \circ z = -5$.

Test7

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$.

a) Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

b) Arătați că $x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$.

c) Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

Test8

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\dfrac{xy}{5}$.

a) Arătați că $1*5=5$.

b) Determinați numărul real x, $x\geq 0$, pentru care $\sqrt{x}*\sqrt{x}=5$.

c) Determinați valorile reale ale lui a, $a\neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „$*$" este strict mai mic decât 0.

Test9

2. Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy-4}{x+y-4}$.

a) Arătați că $8\circ 8=5$.

b) Arătați că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$.

c) Demonstrați că, dacă $x\in M$ și n este număr natural, $n\geq 2$, astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=2^n-\dfrac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

Test10

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

a) Arătați că $4*3=2$.

b) Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

c) Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$".

Test11

2. Pe mulțimea $G=(0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{xy}{xy-x-y+2}$ și se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$.

a) Arătați că $1*1=1$.

b) Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

c) Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\dfrac{1}{2}\right)*f\left(\dfrac{2}{3}\right)*f\left(\dfrac{3}{4}\right)*\ldots*f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

Test12

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\dfrac{xy}{3}-x-y+6$.

a) Arătați că $(-1)*3=3$.

b) Arătați că $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale x, y și z.

c) Determinați numerele reale x, $x\neq 3$ pentru care $\left(x*(x+x'-3)\right)+\left(x'*(2x-3)\right)=42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”.