EXERCITIUL DAT la examen 2021

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=8$.

b) Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

c) Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

TESTELE antrenament:

Model

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(A(0,1,2))=2$.

b) Demonstrați că $\det(A(a,b,c))=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.

c) Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Test1

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-a&2a&0\\-a&1+2a&0\\0&0&1+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=4$.

b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$.

Test2

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=1$.

b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1)=A(1)A(a)$.

c) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.

Test3

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det(A+I_3)=1$.

b) Arătați că $A\cdot A\cdot A=O_3$.

c) Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a, b și c, astfel încât $X=aI_3+bA+cA\cdot A$.

Test4

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=6$.

b) Arătați că $A\cdot B+B=B\cdot A$.

c) Determinați numerele reale x și y, știind că $(x+1)A\cdot B+(y-2)B\cdot A=B\cdot B\cdot B$.

Test5

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

a) Arătați că $\det(A(m)+A(-m))=8$, pentru orice număr real m.

b) Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m)\cdot A(m)=A(0)$.

c) Demonstrați că $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n(A(-1)-A(0))$, pentru orice număr natural nenul n.

SIMULAREA

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Pentru $a=1$, determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.

Test6

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

a) Arătați că $\det A=-1$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.

c) Determinați numărul real m, $m\neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

Test7

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a+1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+(a+1)y+az=6a+3 \\ x+y+(a+1)z=4a+7 \\ 2x+ay+z=2a+6 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(a))=2(a^2+1)$, pentru orice număr real a.

b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(0)=A(0)\cdot A(a)$.

c) Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului de ecuații, atunci x_0, y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Test8

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x+y+az=-5 \\ x-y-az=10 \\ (2-a)x+y+z=1-a \end{cases}$,

unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=4$.

b) Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.

c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și x_0 este număr întreg.

Test9

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(3))=10$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

c) Arătați că, pentru orice număr natural m, $m \geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.

Test10

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$,

unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(4))=5$.

b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

c) Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.

Test11

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(1+a)x+y+z=0\\ x+(1+b)y+z=0\\ x+y+(1+c)z=0\end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale nenule.

a) Arătați că $\det(A(-2,0,2))=-4$.

b) Arătați că, dacă $abc+ab+ac+bc\neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.

c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este întreg.

Test12

1. Se consideră matricea $A(m,x)=\begin{pmatrix}2 & -x & 1\\ 1 & m & 3\\ 3 & -2 & x\end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(A(4,2))=0$.

b) Determinați rangul matricei $A(2,1)$.

c) Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n,p) pentru care $\det(A(3,n))=\det(A(3,p))$.