

SUBIECT III  
Exercitiul 2

1)

Se consideră expresia  $E(x) = \frac{(x^2 + 2x + 2)^2 - 1}{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 5) + 6}$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Arată că  $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 5) + 6 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 3)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .  
b) Determină valoarea minimă a lui  $E(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

2)

Se consideră expresia  $E(x) = \left( \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^2 - x}{x+2}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$ .

- a) Arată că  $E(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$ .  
b) Demonstrează că suma  $E(2) + E(3) + \dots + E(9)$  este un număr rațional din intervalul  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

3)

Considerăm expresia  $E(x) = \frac{8x-12}{4x^2-12x+9} - \frac{5x^2-5x}{2x^2+3x} : (x-1) - \frac{20x}{9-4x^2}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}\right\}$ .

- a) Arată că  $E(x) = \frac{9}{2x-3}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}\right\}$ .  
b) Determină valorile întregi ale lui  $x$  pentru care  $E(x)$  este număr întreg.

4)

Se consideră expresia  $E(x) = -(2x-1)^2 + (x+2)(x-3) + 3(x+2)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Arată că  $E(x) = 15x + 5$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .  
b) Determină numerele naturale  $a$ , pentru care  $E(a) < 100$ .

5)

Considerăm expresia  $E(x) = 1 - \frac{8}{x^2-4} \cdot \left[ \left( \frac{x^2+4}{4x} - 1 \right) : \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) \right]$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ .

- a) Arată că  $E(x) = \frac{x-2}{x+2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ .  
b) Arată că  $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ .

SUBIECT III  
Exercitiul 2

6)

Se consideră expresia  $E(x) = \left( \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1} - \frac{7}{x^2-1} \right) : \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} + 1 \right)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

a) Arată că  $E(x) = -\frac{1}{2x}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

b) Calculează  $E(a)$ , unde  $a = \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}-1}$ .

7)

Fie  $E(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{x+1} \cdot \left[ x-1 : \left( 1 - \frac{x-1}{x+1} \right) \right]$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

a) Arată că  $E(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

b) Demonstrează că  $E(\sqrt{3}) + \sqrt{3}$  este număr natural.

8)

Considerăm expresia:

$E(x) = \left( \frac{4}{x-1} + \frac{5x-13}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{7x-7}{x^2+2x+1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

a) Arată că  $E(x) = \frac{x+1}{x-1}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

b) Calculează produsul  $P = E(2) \cdot E(3) \cdot \dots \cdot E(10)$ .

9)

Considerăm expresia:

$E(x) = \left[ \left( 1 - \frac{3x^2}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x-1}{2x+1} - 1 \right] \cdot \frac{x^2+2x+1}{x-2}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2 \right\}$ .

a) Arată că  $E(x) = x+1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2 \right\}$ .

b) Calculează  $E(10) + E(11) + \dots + E(20)$ .

SUBIECT III  
Exercitiul 2

10)

Considerăm expresia:

$$E(x) = \left( \frac{2x^2}{4x^2 - 4x + 1} + \frac{x-1}{1-2x} \right) : \left( \frac{4x}{4x^2 - 1} - \frac{1}{2x+1} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}.$$

a) Arătați că  $E(x) = \frac{3x-1}{2x-1}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ .

b) Găsește un număr  $a$ , rațional, neîntreg, pentru care  $E(a)$  este număr întreg nenul.

11)

Se consideră expresia  $E(x) = \left( \frac{x+2}{3} - \frac{3}{x+2} \right) : \frac{x^2+6x+5}{3x+6} + \frac{2}{x+1}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -5, -1\}$ .

a) Calculează  $E(0)$ .

b) Arată că  $E(x) = 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, -1\}$ .

12)

Se consideră expresia  $E(x) = \left( \frac{4x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x+1} - \frac{3x+6}{2-x-x^2} \right) : \frac{2x^2+3x}{x^2-2x+1}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -2, -1, 0, 1 \right\}$ .

a) Demonstrează că  $2 - x - x^2 = -(x-1)(x+2)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Arată că  $E(x) + \frac{1}{x} = 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -2, -1, 0, 1 \right\}$ .

13)

Considerăm expresia  $E(x) = \left( 2 + \frac{1}{x-3} \right) : \left[ 1 - \left( \frac{x-2}{x-3} \right)^2 \right]$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$ .

a) Arată că  $E(x) = 3 - x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$ .

b) Calculează  $E^2(547) - E(546) \cdot E(548)$ .

14)

Fie  $E(x) = \left( \frac{x}{x^2-x} - \frac{4}{4x^2-4} + \frac{3x^2+3x}{6x^2+12x+6} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \right)$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

a) Arată că  $E(x) = \frac{x+1}{4x}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

b) Demonstrează că  $E(x) + E(-x) = \frac{1}{2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

SUBIECT III  
Exercitiul 2

15)

a) Fie  $a$  și  $b$  numere reale. Arată că  $(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Considerăm expresia:  $E(x) = \left( \frac{1}{x+2} + \frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-4} \right) : \frac{x^2-1}{x^2-2x} + \frac{2x+6}{x^2+4x+3}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ .

Arată că  $E(x) = \frac{x+4}{x+2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ .

16)

Fie  $n$  un număr natural,  $n \geq 2$  și  $a = \frac{n^3 + 2n^2}{n^2 + n - 2}$ ,  $b = \frac{n-1}{n+1} + \frac{n+2}{n-1} + \frac{n-3}{n^2-1}$ .

a) Arată că  $a = \frac{n^2}{n-1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

b) Arată că  $a - b + \frac{1}{n-1}$  este număr natural nenul, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

17)

Se consideră expresia  $E(x) = \left( \frac{x+2}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} + \frac{9}{x^2+x-2} \right) : \frac{3}{1-x}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .

a) Arată că  $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ , pentru orice număr real  $x$ .

b) Demonstrează că  $E(x) = -2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .

18)

Se consideră expresia  $E(x) = \left( \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) : \frac{x^2+x-6}{x^3+3x^2-4x-12}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 2\}$ .

a) Arată că  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x-2)(x+2)(x+3)$ , oricare ar fi numărul real  $x$ .

b) Demonstrează că  $E(x) = \frac{x+3}{x+1}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 2\}$ .

19)

Se consideră expresia  $E(x) = \left( \frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+3} \right) : \frac{2x+4}{x^2+x} - \frac{x-3}{x+3}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}$ .

a) Arată că  $E(1) = 1$ .

b) Demonstrează că  $E(x)$  are o valoare constantă oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}$ .

SUBIECT III  
Exercitiul 2

20)

Se consideră expresia  $E(x) = \frac{2x}{x+1} + \left( \frac{x-3}{x+1} + \frac{x+1}{x-3} - 2 \right) : \frac{8}{x-3}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ .

a) Arată că  $E(0) = 2$ .

b) Demonstrează că  $E(x)$  are valoare constantă, oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ .