Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3^2 = b_2 b_4 \Rightarrow 3^2 = 6b_4$	**3p**
	$b_4 = \frac{3}{2}$	**2p**
2.	$(-a)^2 + 3(-a) - 4 + a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4$	**3p**
	$a = -2$ sau $a = 2$	**2p**
3.	$2^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{4-2x} \Leftrightarrow x + 1 = 4 - 2x$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor sunt 12, 24, 36 și 48, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	**1p**
5.	$M(3,1)$ este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$M \in OC \Leftrightarrow C \in OM$ și, cum dreapta OM are ecuaţia $x - 3y = 0$, obţinem $a - 3(a+3) = 0$, deci $a = -\frac{9}{2}$	**3p**
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - (-\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$	**3p**
b)	$A \cdot B(a,b) = \begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\det(A \cdot B(a,b)) = 2(a+1)(b+1) - 2(a+1)(b+1) = 0$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$B(a,b) \cdot A = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
	$\begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 0$	**3p**

2.a)	$3\circ 5=\|3-5\|+1=\|-2\|+1=$ $=2+1=3$	**3p** **2p**
b)	$a=(2\circ 3)\circ 4=2\circ 4=3$ $b=2\circ(3\circ 4)=2\circ 2=1$, deci $a-b=2$	**2p** **3p**
c)	Pentru $n=1$ şi m număr natural nenul, $m\circ n=m\circ 1=\|m-1\|+1=m-1+1=$ $=m$, deci există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m,n) pentru care $m\circ n=m$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\ln(x-1)-\ln(x+1)\right)'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=$ $=\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=$ $=\ln\frac{1-0}{1+0}=\ln 1=0$	**3p** **2p**
c)	$x\in(1,+\infty)\Rightarrow x^2-1>0\Rightarrow f'(x)>0$, deci funcția f este crescătoare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f nu este surjectivă	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 2f(x)dx=\int_0^1(2x+2)dx=\left(x^2+2x\right)\Big\|_0^1=$ $=1+2=3$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x(x+1)dx=\int_0^1\left(e^x\right)'(x+1)dx=(x+1)e^x\Big\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$ $=2e-1-e^x\Big\|_0^1=2e-1-(e-1)=e$	**3p** **2p**
c)	$f\left(e^x\right)-e^{f(x)}=e^x+1-e^{x+1}=1-e^x(e-1)$, pentru orice $x\in[0,e]$ $e-1>1$ și $e^x\ge 1$, pentru orice $x\in[0,e]\Rightarrow 1-e^x(e-1)\le 0$, pentru orice $x\in[0,e]$, de unde obținem că $\int_0^e f\left(e^x\right)dx\le\int_0^e e^{f(x)}dx$	**2p** **3p**