

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 5

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$(\lg 100 - \lg 40) \cdot \frac{1}{(\lg 5 - \lg 2)(\lg 5 + \lg 2)} =$ $= \lg \frac{100}{40} \cdot \frac{1}{\lg \frac{5}{2} \cdot \lg 10} = \lg \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\lg \frac{5}{2}} = 1$	2p 3p
2.	$2x = m^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{m^2 - 1}{2}$ <p>Soluția ecuației este un număr real strict mai mic decât 0 <math>\Leftrightarrow m^2 - 1 &lt; 0</math>, deci <math>m \in (-1, 1)</math></p>	2p 3p
3.	$2^{x^2+x} = 2^{4x} \Leftrightarrow x^2 + x = 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ <p><math>x = 0</math> sau <math>x = 3</math></p>	3p 2p
4.	<p>Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile</p> <p>Numerele <math>n</math> din mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică inegalitatea <math>(n+1)! - n! \leq n+2</math> sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile</p> $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{10}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{AO} = 6\vec{i} - 6\vec{j}$ și $\vec{BC} = x_C\vec{i} + (y_C - 2)\vec{j}$ , deci $6\vec{i} - 6\vec{j} = 2x_C\vec{i} + 2(y_C - 2)\vec{j}$ <p>Coordonatele punctului <math>C</math> sunt <math>x_C = 3</math>, <math>y_C = -1</math></p>	3p 2p
6.	<p>Triunghiul este dreptunghic, deci <math>a^2 + 1 = 2(a+2)</math>, de unde obținem <math>a^2 - 2a - 3 = 0</math></p> <p><math>a = -1</math> sau <math>a = 3</math>, care convin</p>	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 2 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(1) - A(a+1) = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a} \\ 2 & 1 & 2 \\ a+2 & 1 & a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a+1} \\ 1 & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$ <p>pentru orice <math>a \in (0, +\infty)</math></p> $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) = \begin{vmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = \sqrt{a+1} - 1 > 0, \text{ pentru orice } a \in (0, +\infty)$	3p 2p

<b>c)</b>	$B(n) = \begin{pmatrix} 1+1+\dots+1 & 0 & 1+2+\dots+n \\ 1+1+\dots+1 & 0 & 1+1+\dots+1 \\ 1^2+2^2+\dots+n^2 & 1+1+\dots+1 & 1+1+\dots+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 0 & n \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & n & n \end{pmatrix}, \text{ pentru}$ <p>orice număr natural <math>n</math></p> <p>Pentru orice număr natural <math>n, n \geq 2</math>, <math>\det(B(n)) = \frac{n^3(n-1)}{2} \neq 0</math>, deci matricea <math>B(n)</math> este inversabilă, pentru orice număr natural <math>n, n \geq 2</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2.a)</b>	$\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}(\sqrt{3} \cdot 2 + 4) - 3(\sqrt{3} + 2) =$ $= 6 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>b)</b>	$x \circ y = \sqrt{3}xy - 3x - 3y + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}xy - 3x - 3y + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ $= \sqrt{3}x(y - \sqrt{3}) - 3(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>c)</b>	$x \circ \sqrt{3} = \sqrt{3}, \sqrt{3} \circ y = \sqrt{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$ $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} = (3^1 \circ \sqrt{3}) \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} = \sqrt{3} \circ \left( 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} \right) = \sqrt{3}$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	<p>Cum <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &lt; 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \arctg x) = 0</math>, <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &gt; 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x^2 + x + 4} = 0</math> și <math>f(0) = 0</math>, obținem <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)</math>, deci <math>f</math> este continuă în <math>x = 0</math></p> <p>Cum <math>f</math> este continuă pe <math>(-\infty, 0)</math> și pe <math>(0, +\infty)</math>, obținem că <math>f</math> este continuă pe <math>\mathbb{R}</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$f(x) = x - \arctg x \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0), \text{ deci funcția } f \text{ este crescătoare pe } (-\infty, 0)$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>c)</b>	<p><math>f</math> este crescătoare pe <math>(-\infty, 0)</math> și continuă în <math>x = 0</math>, deci <math>f(x) \leq f(0)</math> și, cum <math>f(0) = 0</math>, obținem <math>f(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 0)</math></p> <p>Pentru orice <math>x \in [0, +\infty)</math>, <math>f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{x^2 + x + 4} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0</math>, deci <math>f(x) \leq 1</math>, pentru orice număr real <math>x \in [0, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq 1</math>, pentru orice număr real <math>x</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2.a)</b>	$\int_1^5 x(x+2)f(x) dx = \int_1^5 (x+1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^5 =$ $= \frac{25}{2} + 5 - \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = 16$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$\int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x) \Big _1^3 =$ $= \frac{1}{2} (\ln 15 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 5$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>

<b>e)</b>	$F'(x) = f(x), x \in (0, +\infty) \Rightarrow F''(x) = \frac{x^2 + 2x - (x+1)(2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}, x \in (0, +\infty)$ $F''(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci } F \text{ este concavă}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
-----------	---	------------------------