

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Testul 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*  
*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că numerele  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\log_3 9$  și  $\sqrt[3]{16}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră o funcție impară  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Demonstrați că funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (f(x))^2$  este pară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x} - \sqrt{2} \cdot 2^x = 2^{x+1} - 2\sqrt{2}$ .
- 5p** 4. Determinați termenul care îl conține pe  $x^8$  din dezvoltarea  $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ , unde  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** 5. În planul triunghiului  $ABC$  se consideră punctul  $M$ , astfel încât  $2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$ . Determinați numărul real  $k$ , știind că  $\overline{BC} = k \cdot \overline{CM}$ .
- 5p** 6. Determinați  $x \in (0, \pi)$ , știind că  $\sin 2x + 6 \cos x - \sin x - 3 = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  și  $M(m) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$ , unde  $m$  este număr real.

- 5p** a) Arătați că  $\det A = -1$ .
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real  $m$ , rangul matricei  $M(m)$  este cel puțin egal cu 2.
- 5p** c) Determinați numărul real  $m$ ,  $m \neq -1$ , știind că inversa matricei  $M(m)$  este matricea  $A$ .
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție  $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$ .
- 5p** a) Arătați că  $(2+i) \circ (2-i) = 9$ .
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul  $a$ , numărul  $A = (-1 + (a+1)i) \circ (-1 + (a-1)i)$  este real strict mai mic decât 0.
- 5p** c) Determinați numerele complexe  $z$  pentru care  $z \circ z = -5$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+3}$ .

- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ .

- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 (e^x f(x) - 2) dx = -\frac{2}{3}$ .

**5p** | **b)** Calculați  $\int_1^e f(\ln x) dx$ .

**5p** | **c)** Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .