Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)=\sqrt{10}^2-\sqrt{6}^2=$	**2p**
	$=10-6=4=2^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**3p**
2.	$f(-x)=\dfrac{(-x)^{2021}}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x^{2021}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=-\dfrac{x^{2021}}{x^2+1}=-f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este impară	**2p**
3.	$2^{2x}-6\cdot 2^x-16=0\Leftrightarrow\left(2^x-8\right)\left(2^x+2\right)=0$	**3p**
	Cum $2^x>0$, pentru orice număr real, obținem $2^x=8$, deci $x=3$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$ este $C_5^2=$	**3p**
	$=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$	**2p**
5.	$m_{AB}=5$ și, cum $d\parallel AB$, obținem $m_d=5$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y-2=5(x+2)$, deci $y=5x+12$	**2p**
6.	$\sin A=\dfrac{1}{2}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}\Rightarrow\dfrac{2AC}{\sqrt{2}}=2BC$, deci $AC=BC\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(m)\right)=\begin{vmatrix}4 & 1 & m\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{vmatrix}=0-3m+2-(-4m)-12-0=$	**3p**
	$=-3m+4m-10=m-10$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$A(9)=\begin{pmatrix}4 & 1 & 9\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $\det\left(A(9)\right)=-1$	**2p**
	$A^{-1}(9)=\begin{pmatrix}3 & 27 & 19\\ -2 & -18 & -13\\ -1 & -10 & -7\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$m\neq 10\Rightarrow\det\left(A(m)\right)\neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat și $(a,b,c)=(2,1,0)$	**3p**
	Cum $\log_2 a=\log_2 2=1$ și $b+c=1+0=1$, obținem $\log_2 a=b+c$	**2p**

2.a)	$x*3=7(x-3)(3-3)+3=$	**3p**
	$=0+3=3$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$x*x=7(x-3)^2+3$, $x*x*x=49(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$49(x-3)^3+3=-46 \Leftrightarrow (x-3)^3=-1$, deci $x=2$	**3p**
c)	$f(x)*f(y)=7(f(x)-3)(f(y)-3)+3=7\left(\dfrac{5^x}{7}+3-3\right)\left(\dfrac{5^y}{7}+3-3\right)+3=$	**3p**
	$=7\cdot\dfrac{5^x}{7}\cdot\dfrac{5^y}{7}+3=\dfrac{5^{x+y}}{7}+3=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-x\cdot\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2x+2-x(x+1)}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,-2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-2,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $f(-2)=-\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ și, cum f este continuă, obținem $\operatorname{Im} f=\left[-\sqrt{2},1\right)$	**3p**
2.a)	$F'(x)=2-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{2x^2(x+2)-(x+2)-4x^2}{x^2(x+2)}=$	**2p**
	$=\dfrac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**3p**
b)	$\int\limits_1^2(x+2)f(x)\,dx=\int\limits_1^2\dfrac{2x^3-x-2}{x^2}\,dx=\int\limits_1^2\left(2x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx=\left(x^2-\ln x+\dfrac{2}{x}\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=4-\ln 2+\dfrac{2}{2}-1+\ln 1-2=2-\ln 2$	**2p**
c)	$\int\limits_2^m f(x)\,dx=F(x)\Big\|_2^m=F(m)-F(2)=2m+\dfrac{1}{m}-\dfrac{9}{2}+4\ln\dfrac{4}{m+2}$	**3p**
	$2m+\dfrac{1}{m}-\dfrac{9}{2}+4\ln\dfrac{4}{m+2}=2m+\dfrac{1}{m}-\dfrac{17}{2}$, deci $\ln\dfrac{4}{m+2}=-1\Rightarrow m=4e-2$, care convine	**2p**