SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

EXERCITIUL DAT la examen 2020

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)\,dx=-\frac{1}{6}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0$.

c) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\ln\frac{5}{2}$.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=e^2-1$.

b) Arătați că $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=1-\ln 2$.

c) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$.

TESTELE antrenament:

Test 1

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in(-\infty,0]\\ \frac{3x-1}{x+1}, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_1^2 f(x)\,dx$.

c) Arătați că $\int_{-1}^0 e^x f(x)\,dx=\frac{5-3e}{e}$.

SUBIECT III, exercitiul 2

Test 2

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

a) Arătați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0,\pi]$.

b) Calculați $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)\,dx$.

c) Arătați că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=1$.

Test 3

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2+1\right)-2$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x+2\right)dx=0$.

b) Calculați $\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3+2\right)e^x\,dx$.

c) Determinați numărul real pozitiv m, știind că $\int_{1}^{2} f(x)\,dx=m^2+1$.

Test 4

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)\left(f(x)-x^2\right)dx=1$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx$.

c) Determinați numărul natural n, știind că $\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\dfrac{n^2}{3}+\dfrac{\pi}{4}-1$.

SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 5

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2, & x\in(-\infty,0) \\ e^x+1, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=e$.

b) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați $\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$.

Test 6

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x)\,dx=6$.

b) Calculați $\int_{-2}^0 f(x)\,dx$.

c) Demonstrați că $\int_{-3}^a f'(x)f''(x)\,dx=2\left(\frac{1}{(a+4)^4}-1\right)$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$.

Test 7

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\ln x$.

a) Arătați că $\int_1^2 xf(x)\,dx=e(e-1)$.

b) Calculați $\int_e^{e^2}\frac{g(x)}{xe^x}\,dx$.

c) Demonstrați că $\int_1^e\left(f(x)+g(x)\right)dx=e^e$.

SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 8

2. Se consideră funcțiile $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ și $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

a) Demonstrați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \dfrac{f(x)}{F(x)}dx=\ln\dfrac{8}{3}$.

Test 9

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_1^e \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)}dx=1$.

b) Calculați $\int_1^2 f^2(x)dx$.

c) Demonstrați că $\int_0^{2020} f(x)dx\le\int_0^a f(x)dx$, pentru orice $a\in[2020,+\infty)$.

Test 10

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2020}-2020x+1$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)+2020x-1)dx=\dfrac{1}{2021}$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $[1,+\infty)$.

c) Calculați $\int_0^1 (f(-x)-f(x))e^x dx$.

SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 11

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x+2$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x-2\right)dx=0$.

b) Arătați că $\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3-3x-1\right)dx=-2$.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Test 12

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+3x$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-3x\right)dx=0$.

b) Arătați că $\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3-x^2\right)e^x dx=3$.

c) Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0)=1$. Demonstrați că $\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{F^2(x)}dx=\frac{25}{37}$.

Test 13

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x+e^x$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\frac{2}{5}$.

b) Arătați că $\int_{1}^{e}\left(f(x)-x^4-e^x\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_{0}^{a}f(x)dx=\frac{5a^2+54}{10}+e^a$.

SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 14

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\left(x^2+1\right)dx=0$.

b) Calculați $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)e^x f(x)\,dx$.

c) Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_{0}^{a}\left(f(x)-f(-x)\right)dx=\ln(2a)$.

Test 15

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+x+1$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-x-1\right)dx=0$.

b) Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x$ este o primitivă a funcției f.

c) Determinați numerele reale a pentru care $\int_{1}^{2}\dfrac{f(x)}{x^2+1}\cdot e^x dx=(ae)^2-e$.

Test 16

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

a) Arătați că $\int_{0}^{3}\left(f(x)+4\right)dx=9$.

b) Calculați $\int_{0}^{1}\dfrac{1}{f(x)+5}dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=-8$.

SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 17

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=30$.

b) Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{5x^2+2020}{2}+\ln x$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\int_1^e\left(f(x)-5x\right)\ln x\,dx$.

Test 18

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2$.

a) Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\frac{1}{4}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(2)=7$.

c) Arătați că $\int_0^1 e^x\left(f(x)-x^3+x^2\right)dx=3e-4$.

Test 19

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+4x^2$.

a) Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-4x^2\right)dx=12$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=2020$.

c) Determinați numărul real m, $m>1$, știind că $\int_1^m\frac{f(x)}{x^2}dx=\frac{17}{2}$.

SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 20

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\sqrt{x}$.

a) Arătați că $\int_1^4\left(f(x)+\sqrt{x}\right)dx=21$.

b) Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2020$ este o primitivă a funcției f.

c) Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\sqrt{x}\right)e^x dx=e(2e-1)$.