

SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

EXERCITIUL DAT la examen 2020

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\ln x$.

a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .

c) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,1]$.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Demonstrați că $f(x) + \ln(x^2 + 1) < \frac{5}{2}$, pentru orice $x \in [0,1]$.

TESTELE antrenament:

Test 1

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 1)$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(\ln x + 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = \frac{1}{e}$ situat pe graficul funcției f .

c) Demonstrați că $\sqrt{e}f(x) + 4 \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

Test 2

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x + 2020$.

a) Arătați că $f'(x) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty, 0]$.

c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 2025$ nu admite nicio soluție în intervalul $[-1,1]$.

SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 3

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Arătați că $f'(x) = 6x(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3 + 2x^2 + x - 2}{x-1} = 2$.

c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 12x + 2020$.

Test 4

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Demonstrați că funcția f este convexă.

Test 5

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$.

a) Arătați că $f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .

c) Demonstrați că $-27 \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in [0, 3]$.

Test 6

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-1)e^x$.

a) Arătați că $f'(x) = 2xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$.

c) Demonstrați că $xe^x \geq e^x - 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 7

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^{2020} + 1, & x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

- a) Arătați că funcția f este continuă în $x_0 = 1$.
- b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(1, +\infty)$.

Test 8

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 - 63$.

- a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .
- c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9}$.

Test 9

1. Se consideră funcția $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.

- a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x = 3$, situat pe graficul funcției f .
- c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(2, +\infty)$.

Test 10

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2 \ln x$.

- a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- c) Demonstrați că $\ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$.

SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 11

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + (x-1)^2$.

a) Arătați că $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = 3$.

c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $y = 3x + 1$.

Test 12

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Test 13

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 3) + 3$.

a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x+1} = -3$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .

Test 14

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x + 9$.

a) Arătați că $f'(x) = 3(1-x)(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2} = -9$.

c) Demonstrați că $f(x) \leq 11$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.

SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 15

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + \ln x$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4x-1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .

Test 16

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 9x + 5$.

a) Arătați că $f'(x) = 9(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .

c) Demonstrați că $f(2019) + f(2021) \leq f(2020) + f(2022)$.

Test 17

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 12x + 11$.

a) Arătați că $f'(x) = 12(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 4x^3}{x}$.

c) Demonstrați că $3 \leq f(x) \leq 19$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Test 18

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Demonstrați că funcția f este concavă.

SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – TEHNOLOGIC

Test 19

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 5$.

a) Arătați că $f'(x) = 12x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - 4x^3}$.

c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .

Test 20

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 3$.

a) Arătați că $f'(x) = 8x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .

c) Demonstrați că $-5 \leq f(x) \leq -3$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.