

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

EXERCITIUL DAT la examen 2020

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + \sqrt[3]{y} - 2$.

- Arătați că $1 \circ 1 = 0$.
- Determinați numărul real a pentru care $x \circ a = x$, pentru orice număr real x .
- Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x^6 = 4$.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.

- Arătați că $0 * 1 = 1$.
- Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 1$.
- Demonstrați că $x * (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

TESTELE antrenament:

Test 1

2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Arătați că $N = \sqrt{33} * \sqrt{31}$ este un număr natural.
- Determinați numărul $x \in M$ pentru care $(x * x * x)^2 = 300$.
- Se consideră funcția $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x + y) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (-\infty, 0]$.

Test 2

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.

- Arătați că $x \circ y = (x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 5$.
- Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n .

Test 3

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5(x + y - 4) - xy$.

- Arătați că $x * y = -(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y .
- Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x * x \geq x$.
- Calculați $1 * (-2) * 3 * (-4) * \dots * 2019 * (-2020)$.

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 4

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$.

- Arătați că $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y .
- Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = 5$.
- Dați exemplu de numere distincte $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care numărul $a \circ b$ este natural.

Test 5

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = xy - 101x - 101y + 10302$.

- Arătați că $x * y = (x - 101)(y - 101) + 101$, pentru orice numere reale x și y .
- Determinați numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „*“.
- Determinați numerele întregi x și y , cu $x < y$, pentru care $x * y = 202$.

Test 6

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 1$ și $x \circ y = xy - x - y + 2$.

- Arătați că $2 \circ (1 * 3) = (2 \circ 1) * (2 \circ 3)$.
- Determinați numerele reale x pentru care $3^{x \circ x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x * x}$.
- Determinați numerele reale x și y pentru care $(x - 1) * (2y + 1) = 2$ și $(x + y) \circ 4 = 10$.

Test 7

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + m(x + y)$, unde m este număr real.

- Arătați că $(-1) * 1 = -1$, pentru orice număr real m .
- Demonstrați că $x * y = (x + m)(y + m) - m^2$, pentru orice numere reale x , y și m .
- Pentru $m = -1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x * 5^{x+1} = -1$.

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 8

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - 3\sqrt{2}(x + y) + 6 + \sqrt{2}$.

a) Arătați că $\sqrt{2} \circ 1 = \sqrt{2}$.

b) Demonstrați că $x \circ y = 3(x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y .

c) Calculați $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} \circ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \circ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

Test 9

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}$.

a) Arătați că $2020 * (-2020) = 2$.

b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.

c) Știind că $(\mathbb{R}, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

Test 10

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 11xy$.

a) Demonstrați că $x \circ y = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y .

b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = \frac{8}{11}$.

c) Calculați partea întreagă a numărului $a = \left(1 - \frac{1}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{2}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{3}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{4}{11}\right)$.

Test 11

2. Pe mulțimea $M = (0, 1)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$.

a) Arătați că $x \circ \frac{1}{2} = x$, pentru orice $x \in M$.

b) Demonstrați că legea de compoziție „ \circ ” este comutativă.

c) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 12

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3x - 2y + 1$.

- Arătați că $5 * 8 = 0$.
- Determinați numărul real x pentru care $2020^x * 2020^x = 2$.
- Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$.

Test 13

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y$.

- Demonstrați că $x \circ y = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y .
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$. Arătați că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y .
- Demonstrați că $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = \frac{(x_1+3)(x_2+3) \cdot \dots \cdot (x_n+3) - 3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și orice numere reale x_1, x_2, \dots, x_{n-1} și x_n .

Test 14

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5(x+2)(y+2) - 2$.

- Arătați că $x * (-2) = -2$, pentru orice număr real x .
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - 10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y) = f(x) * f(y)$, pentru orice numere reale x și y .
- Determinați numărul real x , astfel încât $x * x * x = 23$.

Test 15

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 + xy + y^2$.

- Arătați că $x \circ x \geq 0$, pentru orice număr real x .
- Se consideră numerele reale a și b cu $a \neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x \circ a = x \circ b$.
- Determinați numărul real x cu proprietatea că $x \circ (x+1) = -x^3$.

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 16

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 7$.

a) Arătați că $5 \circ 2 = 0$.

b) Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7 + \log_7 x$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.

c) Demonstrați că $a^2 \circ b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b .

Test 17

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

a) Arătați că $0 * 8 = 4$.

b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” **nu** are element neutru.

c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m * n$ este natural nenul.

Test 18

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 5xy + x + y$.

a) Arătați că $1 \circ 4 = 25$.

b) Demonstrați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.

c) Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.

Test 19

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.

a) Arătați că $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b) Determinați numărul real a , astfel încât $a * x = a$, pentru orice număr real x .

c) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 20

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru

$$z_1 \circ z_2 = iz_1z_2 + z_1 + z_2 .$$

a) Arătați că $i \circ i = i$.

b) Demonstrați că $z_1 \circ z_2 = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2 .

c) Demonstrați că simetricul numărului $\frac{1}{2}(1+i)$ în raport cu legea de compoziție „ \circ ” este număr real.