SUBIECT II , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

EXERCITIUL DAT la examen 2020

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=36$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătați că cel puțin un element al matricei X este număr irațional.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & x+3\\ x-3 & x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numărul natural n astfel încât $A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

c) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}$.

TESTELE antrenament:

Test 1

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}x & 3\\ -3 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(x))=x^2+9$, pentru orice număr real x.

b) Demonstrați că $A(2020-x)+A(2020+x)=2A(2020)$, pentru orice număr real x.

c) Determinați numărul natural n, pentru care $A(n)A(2-n)=2A(-6)$.

Test 2

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det A=0$.

b) Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați perechile de numere naturale (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(6)$.

SUBIECT II , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 3

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & x\\ 2x & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=4$.

b) Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale a pentru care $A(a)A(a)=A(5)$.

Test 4

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=A+xB$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(M(1))=0$.

b) Demonstrați că $M(x)M(y)=M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x=y$.

c) Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M(m^2+1)M(n^2)=M(n^2)M(m^2+1)$.

Test 5

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay=1\\ 2x+y+az=4\\ -3x-y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real și $A(a)$ matricea coeficienților sistemului.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Pentru $a=-1$, determinați soluția sistemului de ecuații.

c) Demonstrați că, pentru orice număr rațional p, matricea $A(p)$ este inversabilă.

Test 6

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x,y)=xI_2+yA$, unde x și y sunt numere reale.

a) Arătați că $\det A=-1$.

b) Demonstrați că $M(x,y)\cdot M(a,b)=M(xa+yb,xb+ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

c) Determinați perechile (x,y) de numere reale, știind că $\det(M(x,y))=4$ și suma elementelor matricei $M(x,y)\cdot M(x,y)$ este egală cu 8.

SUBIECT II , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 7

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=1\\ x-2y+z=2\\ ax+y+z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=-9$.

b) Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ **nu** depinde de numărul real a.

c) Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.

Test 8

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln a\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

a) Arătați că $\det(A(e))=e$.

b) Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det(A(a)\cdot A(a))$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

c) Determinați numerele $a, b\in(0,+\infty)$ pentru care $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

Test 9

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=-4$.

b) Determinați mulțumea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0=y_0=z_0$.

SUBIECT II , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 10

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}(m^2-1)x+my+4z=1\\ x+y+z=0\\ mx+3y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

a) Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1,0,1)$ este soluție a sistemului de ecuații.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

c) Determinați numerele $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}$.

Test 11

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=\det(A+I_2)$.

b) Determinați numărul real a, știind că $A\cdot A\cdot A=aI_2$.

c) Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\neq n$, pentru care $\det(A+mI_2)=\det(A+nI_2)$.

Test 12

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}5-a & 10\\ -2 & -4-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=0$.

b) Determinați numărul real a, știind că $A(a)\cdot A(a)=A(0)$.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1)\cdot X=A(0)$.

Test 13

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

a) Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$.

c) Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 14

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\ -2x-3y=1\\ 2x+4y+az=-2\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(a))=a+2$, pentru orice număr real a.

b) Pentru $a=0$, determinați inversa matricei $A(a)$.

c) Pentru $a\neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații.

Test 15

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(x))=6^x$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numărul real x, știind că $A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)$.

c) Demonstrați că, orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are două elemente numere iraționale.

Test 16

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(a))=4$, pentru orice număr real a.

b) Arătați că $A(a)\cdot A(b)=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^n A(x)$.

Test 17

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ a^2 & a^3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

b) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(2)+xI_2)=0$.

c) Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, atunci $a=b$.

SUBIECT II , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 18

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(A(2,3))=0$.

b) Demonstrați că, dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(-1,\sqrt{2})\cdot X=A(0,0)$.

Test 19

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ y+3z=4 \\ 2x-y+az=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=18$.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

c) Pentru $a=1$, rezolvați sistemul de ecuații.

Test 20

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=2 \\ x+y=a \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det A=-2$.

b) Arătați că matricea $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este inversa matricei A.

c) Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.