SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

EXERCITIUL DAT la examen 2020

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^3+1)f^2(x)\,dx=\dfrac{1}{3}$.

b) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\dfrac{1}{3}\ln 2$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

a) Arătați că $\int_1^2 x\cdot\dfrac{1}{f(x)}\,dx=\dfrac{31}{3}$.

b) Arătați că $\int_0^1 g(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

TESTELE antrenament:

Test 1

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)}dx=1$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}dt=x$.

Test 2

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x+1)f(x)dx=2$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=2-\ln 2$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+1)^n(f(x))^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Test 3

2. Se consideră funcția $f:(-5,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{74}{3}$.

b) Calculați $\int_{-3}^3 |x f(x)|dx$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{1}{f^n(x)}dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

Test 4

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{4}{3}$.

b) Calculați $\int_{-1}^1 |x f(x)|dx$.

c) Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\cdot f(t)dt}{x^2}$.

[Test 5](http://www.e3.ro)

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$.

a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

b) Calculați $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}(f(x)-\ln x)dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>e$, știind că $\int_e^a \ln x\,dx=2a$.

[Test 6](http://www.e3.ro)

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{2}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x)dx=2\ln 2$.

b) Calculați $\int_1^e \left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$.

c) Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\frac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

[Test 7](http://www.e3.ro)

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(x)dx=\frac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

Test 8

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

a) Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=4$.

b) Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2}f(\ln x)dx$.

c) Arătați că $\int_0^1 f(x)F(x)dx=2(e-3)^2$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

Test 9

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$.

b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\ln x\,dx=\frac{e^2-7}{4}$.

c) Determinați numerele reale a, $a>1$ pentru care $\int_1^a f(x)e^x dx=e^a-3e$.

Test 10

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

a) Determinaţi primitiva G a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(1+e^x\right)f(x)$ pentru care $G(0)=0$.

b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Demonstraţi că $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$.

Test 11

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{e^x}dx=1$.

b) Arătaţi că $\int_1^2 x^3 f\left(x^2\right)dx=\frac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$.

c) Demonstraţi că $\int_1^e f(x)dx+\int_1^e e^x\ln x dx=e^e$.

Test 12

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=4$.

b) Calculaţi $\int_{-4}^1 f(x)dx$.

c) Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, f(\sin x)dx=6-2\sqrt{5}$.

SUBIECT III, exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

Test 13

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1}\left|x f(x)\right|dx$.

c) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=2$.

Test 14

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)dx=\frac{4}{3}$.

b) Calculați $\int_0^1 f(-x)dx$.

c) Determinați numerele reale a și b, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x}\left(-x^2+ax+b\right)$ este o primitivă a funcției f.

Test 15

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

a) Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{26}{3}$.

b) Calculați $\int_1^2\left(f(x)-x^2\right)dx$.

c) Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$.

Test 16

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 (x^4+1)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

b) Demonstraţi că $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{\pi}{8}$.

c) Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1)=0$. Calculaţi $\int_0^1 F(x)dx$.

[Test 17](#)

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\frac{\pi}{4}$.

b) Calculaţi $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

c) Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg} x}{x+2}\right)dx=\frac{\pi}{4}\ln 3$.

[Test 18](#)

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$.

a) Arătaţi că $\int_0^3 f^2(x)dx=15$.

b) Demonstraţi că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

c) Arătaţi că $(n+2)I_n+2(n-1)I_{n-2}=3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 3$.

[Test 19](#)

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x}$.

a) Arătați că $\int_1^4 e^x f(x)dx=27$.

b) Calculați $\int_1^e f(\ln x)dx$.

c) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=2$.

Test 20

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.

a) Arătați că $\int_0^2 f(x)dx=\frac{\pi}{8}$.

b) Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

c) Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_0^a x f(x)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.