# SUBIECT II , exercitiul 1

**TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA**

**EXERCITIUL DAT la examen 2020**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

**b)** Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

**c)** Determinați numerele întregi $a$ pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

**EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2-a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & 2a-5 & a-2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+(2-a)y+az=1 \\ ax+y+z=2-a \\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4 \end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=3$.

**b)** Demonstrați că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real $a$.

**c)** Determinați numărul natural $a$ pentru care sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0)$ și $x_0$, $y_0$, $z_0$ sunt numere naturale.

# TESTELE antrenament:

**Test 1**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2-a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$.

**c)** Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X = A(5)$.

**Test 2**

# SUBIECT II , exercitiul 1

**TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -2a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2a & -2a^2 & 1\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$.

**c)** Demonstrați că, dacă $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural $n$ este multiplu de $2021$.

## Test 3

**1.** Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & 2-a\\ 0 & 2 & 0\\ 2-a & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(2))=8$.

**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$.

**c)** Determinați perechile de numere întregi $p$ și $q$ pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.

## Test 4

**1.** Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x & 1 & -x\\ 1 & 0 & 1\\ -x & 1 & x\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

**b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(y)-A(2xy))=0$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**c)** Determinați numărul natural $n$ pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=nI_3$.

## Test 5

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & a+1 & a\\ a & 6 & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+2y+z=3\\ 2x+(a+1)y+az=3\\ ax+6y+4z=a+3\end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(a))=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real $a$.

**b)** Arătați că **nu** există niciun număr real $a$ pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a)=A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.

**c)** Determinați numerele întregi $a$, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică $(x_0,y_0,z_0)$ cu $x_0$, $y_0$ și $z_0$ numere întregi.

# SUBIECT II , exercitiul 1



## Test 6

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde $a$ și $b$ sunt numere reale.

**a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

**b)** Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

**c)** Determinați numerele reale $a$ și $b$ pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

## Test 7

**1.** Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & a\\ 1 & -a & 0\end{pmatrix}$ și $(A(a))^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -a\\ 3 & a & 0\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

**b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional $q$, matricea $A(q)$ este inversabilă.

**c)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-(A(a))^t$. Determinați numerele raționale $p$ pentru care $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

## Test 8

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ a-3 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

**b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui $a$ pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

**c)** Determinați numărul real $a$, știind că sistemul de ecuații are soluție unică $(x_0,y_0,z_0)$ și $x_0$, $y_0$ și $z_0$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

## Test 9

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr întreg.

**a)** Arătați că $\det(A(1))=7$.

**b)** Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu $3$, pentru orice număr întreg $a$.

**c)** Determinați numărul întreg $m$ pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

**Test 10**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1 & -2\\ a-1 & -1 & 1\\ 2a & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(2a+1)x+y-2z=a\\ (a-1)x-y+z=a+1,\\ 2ax-2y+z=1\end{cases}$ unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

**b)** Determinați numărul real $a$ pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

**c)** Determinați numărul real $a$ pentru care există $y_0$ și $z_0$, numere reale, astfel încât $(2,y_0,z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.

**Test 11**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ a & i & a\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=i$.

**b)** Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

**c)** Calculați $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

**Test 12**

# SUBIECT II , exercitiul 1



**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=-15$.

**b)** Determinați numărul real $a$ pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.

**c)** Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.

**Test 13**

**1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde $m$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

**b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui $m$ pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

**c)** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m,m^2)$ și $C(m+1,(m+1)^2)$, unde $m$ este număr real. Determinați numerele reale $m$, știind că triunghiul $ABC$ are aria egală cu $1$.

**Test 14**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, unde $m$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det A=1$.

**b)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m$, rangul matricei $M(m)$ este diferit de $2$.

**c)** Determinați numărul real $m$, $m\neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea $A$.

**Test 15**

**1.** Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice număr real $a$.

**b)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-I_3$, unde $a$ este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=O_3$.

**c)** Determinați numărul natural nenul $n$, știind că suma elementelor matricei $X$ pentru care $A(2)\cdot X=A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$ este egală cu $21$.

**Test 16**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

**a)** Arătați că $\det A=0$.

**b)** Arătați că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei $B$.

**c)** Dați exemplu de trei matrice $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

**Test 17**

**1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&m&1\\1&-3&2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\2x+my+z=0\\x-3y+2z=0\end{cases}$, unde $m$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real $m$.

**b)** Determinați numărul real $m$ pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

**c)** Pentru $m=9$, se consideră $(x_0,y_0,z_0)$ o soluție a sistemului de ecuații, cu $x_0$, $y_0$ și $z_0$ numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

**Test 18**

**1.** Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

**b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**c)** Determinați rangul matricei $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$.

## Test 19

**1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+(m+1)y+z=2 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$, unde $m$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

**b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.

**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m$, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.

## Test 20

**1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+mz=4 \\ 4x+y+mz=6 \\ x-my-z=-1 \end{cases}$, unde $m$ este număr real.

**a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

**b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui $m$ pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

**c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția $(x_0,y_0,z_0)$ a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.