

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$z = 1 - (i\sqrt{2})^2 = 1 - 2i^2 = 1 - 2(-1) =$ $= 1 + 2 = 3$ , care este număr natural	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(x) + f(1-x) = 3x + a + 3(1-x) + a = 2a + 3$ , pentru orice număr real $x$ $2a + 3 = 7 \Rightarrow a = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$5^x + 5^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (5^x - 1)^2 = 0$ $5^x = 1$ , deci $x = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui $A$ , care îl conțin pe 1, este egal cu numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{2, 3, 4, 5\}$ , deci este egal cu $C_4^2 =$ $= \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5.</b>	$m_{OM} = -1$ și, cum $m_{OM} \cdot m_d = -1$ , obținem $m_d = 1$ Ecuția dreptei $d$ este $y - y_M = m_d(x - x_M)$ , deci $y = x + 8$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$\sin B = \frac{AC}{BC}$ $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = AC$ , deci triunghiul $ABC$ este isoscel	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 4 + 3 - 4 - 0 - 4 = -1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(a)) = -(a^2 - a + 1)$ , pentru orice număr real $a$ $a^2 - a + 1 \neq 0$ , pentru orice număr real $a \Rightarrow \det(A(a)) \neq 0$ , deci matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	Cum $a \in \mathbb{Z}$ , inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det(A(a))$ este divizor al lui 1 și, cum $\det(A(a)) < 0$ , pentru orice număr real $a$ , obținem că $\det(A(a)) = -1$ $a = 0$ sau $a = 1$ , care convin	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$1 * 2020 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{1^3 \cdot 2020^3 - 1^3 - 2020^3 + 9} =$ $= \frac{1}{2} \sqrt[3]{-1 + 9} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{8} = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 1 + 8} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 (y^3 - 1) - (y^3 - 1) + 8} =$ $= \sqrt[3]{\frac{1}{8} (x^3 - 1)(y^3 - 1) + \frac{1}{8} \cdot 8} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} (x^3 - 1)(y^3 - 1) + 1}, \text{ pentru orice } x, y \in A$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x * x = \sqrt[3]{\frac{1}{8} (x^3 - 1)^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in A, \text{ deci } \frac{1}{8} (x^3 - 1)^2 + 1 = x^3$ $(x^3 - 1)^2 = 8(x^3 - 1), \text{ deci } x^3 - 1 = 0 \text{ sau } x^3 - 1 = 8, \text{ de unde } x = 1 \text{ sau } x = \sqrt[3]{9}, \text{ care convin}$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{-x(x-1) + (x-2)^2}{x(x-1)(x-2)^2} =$ $= \frac{-x^2 + x + x^2 - 4x + 4}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-3x + 4}{x(x-1)(x-2)^2}, x \in (2, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x-2} + \ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \right) = 0$ <p>Dreapta de ecuație <math>y = 0</math> este asimptotă orizontală spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	<p><math>x \in (2, +\infty) \Rightarrow f'(x) &lt; 0</math>, deci <math>f</math> strict descrescătoare pe <math>(2, +\infty)</math> și, cum <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0</math>, obținem că <math>f(x) &gt; 0</math>, pentru orice <math>x \in (2, +\infty)</math></p> <p><math>\frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x} &gt; 0</math>, deci <math>\frac{1}{x-2} &gt; -\ln \frac{x-1}{x}</math>, de unde obținem că <math>\frac{1}{x-2} &gt; \ln \frac{x}{x-1}</math>, pentru orice <math>x \in (2, +\infty)</math></p>	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (x^3 + 1) f^2(x) dx = \int_0^1 (x^3 + 1) \left( \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}} \right)^2 dx = \int_0^1 x^2 dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx =$ $= \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \Big _0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$I_n = \int_0^1 f(x^n) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n} + 1}} dx$ <p>și, cum <math>0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n} + 1}} \leq x^n</math>, pentru <math>x \in [0, 1]</math> și, pentru fiecare număr natural nenul <math>n</math>, obținem că <math>0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx</math></p> <p><math>0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}</math>, pentru fiecare număr natural nenul <math>n</math> și, cum <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0</math>, obținem</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0</math></p>	<b>3p</b> <b>2p</b>