Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $(2+3i)^2 = i(5i+12)$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$. Determinați numărul real a, astfel încât $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5\cdot 2^{x+1}\cdot 3^x = 12\cdot 5^x$.
5p	**4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, care au proprietatea $f(1)\geq 3$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy, se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1,3)$ și $C(-2,4)$. Determinați panta dreptei BD.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(x))=6^x$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)$.
5p	**c)** Demonstrați că, orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are două elemente numere iraționale.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2+xy+y^2$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ x\geq 0$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Se consideră numerele reale a și b cu $a\neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x\circ a=x\circ b$.
5p	**c)** Determinați numărul real x cu proprietatea că $x\circ(x+1)=-x^3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-(x+1)\ln(x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este concavă.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}-e$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n(x-f(x))dx$. Demonstrați că $I_n+nI_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.