EXERCITIUL DAT la examen 2021

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2+3$.

a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-e^x-3\right)dx=7$.

b) Arătați că $\int_0^1 x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\frac{5}{2}$.

c) Determinați $a\in(0,1)$, știind că $\int_0^a \frac{1}{f(x)-f'(x)}dx=\frac{1}{6}$.

TESTELE antrenament:

Model

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{5}{2}$.

b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

c) Determinați numărul real a, știind că $\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}dx=\frac{e^2+a}{4}$.

Test1

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_1^2 f(x)(x+1)\,dx=\frac{1}{2}$.

b) Arătați că $\int_2^3 f(x)dx=1+\ln\frac{9}{16}$.

c) Determinați numărul real $a>1$ astfel încât $\int_1^a f(x)f'(x)dx=\frac{1}{8}$.

Test2

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2-1\right)+3$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+x-3\right)dx=0$.

b) Calculați $\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3-3\right)e^x dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $\int_{0}^{1}f(x)dx=-a^2+5$.

Test3

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{2}(x+2)f(x)dx=6$.

b) Calculați $\int_{0}^{4}\left(f(x)-\dfrac{x^2}{x+2}\right)dx$.

c) Determinați numărul natural n, știind că $\int_{0}^{6}\left(x^2-9\right)f(x+1)dx=n^2$.

Test4

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x-1)(x+1)$.

a) Arătați că $\int_{1}^{5}\dfrac{f(x)}{x+1}dx=20$.

b) Calculați $\int_{1}^{2}\dfrac{f(x)}{x^2}dx$.

c) Determinați numărul real a, $a\in\left[\dfrac{1}{2},2\right)$, știind că $\int_{a}^{2}f'(x)\sqrt{f(x)}dx=18$.

Test5

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x-2$.

a) Arătați că $\int_1^3 (f(x)-\ln x)dx=0$.

b) Calculați $\int_1^e (f(x)-x+2)dx$.

c) Demonstrați că orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este convexă.

SIMULARE

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=4$.

b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)+\frac{1}{x}\right)\ln x dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

c) Determinați cel mai mare număr natural nenul n pentru care $\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1}f^n(x)dx\geq\frac{1}{2021}$.

Test6

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x^2+1}+1, & x\in(-\infty,0]\\ e^x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

a) Arătați că $\int_1^4 f(x)dx=e\left(e^3-1\right)$.

b) Calculați $\int_1^2 xf(x)dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $\int_{-a}^0 f(x)dx=a-\ln(a+1)$.

Test7

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^5+x^2-1$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2\right)dx=-2$.

b) Arătați că $\int_{2}^{4}\frac{f(x)-2x^5}{2x}dx=\frac{6-\ln 2}{2}$.

c) Calculați $\int_{0}^{1}x^4\left(f(x)-x^2\right)^2dx$.

Test8

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_{0}^{2}(x+1)f(x)dx=4$.

b) Calculați $\int_{1}^{3}\frac{f(x)}{x}dx$.

c) Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\cdot f(-x)dx=4(1-\ln 3)$.

Test9

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$.

a) Arătați că $\int_{1}^{3}\left(f(x)+2\sqrt{x}\right)dx=8$.

b) Arătați că funcția f este o primitivă a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

c) Calculați $\int_{1}^{2}\frac{1}{f\left(x^2\right)}dx$.

Test10

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{2}{3}$.

b) Arătați că $\int_1^e (f(x)+1)\ln x dx=\frac{2e^3+1}{9}$.

c) Determinați numărul real, a, $a\in(0,+\infty)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(\sin x)+f(\cos x))\operatorname{tg} x dx=\ln a$.

Test11

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

a) Arătați că $\int_0^2 f(x)dx=6$.

b) Calculați $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$.

c) Determinați $a\in(0,2)$ pentru care $\int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2+2f(x)+2}dx=\frac{2}{3}$.

Test12

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)dx=24$.

b) Calculați $\int_0^1 (f(x)-1)dx$.

c) Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0,+\infty)$.