

**EXERCITIUL DAT la examen 2021**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4}{x} + \ln x - 5$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x-4}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .

c) Arătați că **nu** există asimptotă spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**TESTELE antrenament:****Model**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + \frac{x}{x^2 + 1}$ .

a) Arătați că  $f'(x) = e^x + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

c) Demonstrați că  $\frac{2-e}{2e} \leq f(x) \leq \frac{2e+1}{2}$ , pentru orice  $x \in [-1, 1]$ .

**Test1**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 8)e^x$ .

a) Arătați că  $f'(x) = (x-2)(x+4)e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x-2}$ .

c) Demonstrați că  $x^2 \geq 8 - 4e^{2-x}$ , pentru orice număr real  $x$ .

**Test2**

2. Pe mulțimea  $M = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{3xy + 1}{x + y}$ .

a) Arătați că  $1 * 1 = 2$ .

b) Calculați  $((1 * 2) * 3) - (1 * (2 * 3))$ .

c) Determinați numerele reale  $x \in M$  pentru care  $x * x = 2$ .

**Test3**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - x - 5 \ln x + 1$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x-1)(6x+5)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{xf'(x)} = \frac{1}{2}$ .

c) Demonstrați că  $3x^2 - x - 2 \geq \ln(x^5)$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .

### Test4

1. Se consideră funcția  $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{4}{x+3}$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$ ,  $x \in (-3, +\infty)$ .

b) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției  $f$ .

c) Demonstrați că  $x^2 + f(x) \geq 1$ , pentru orice  $x \in (-3, +\infty)$ .

### Test5

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x - 49$ .

a) Arătați că  $f'(x) = -6(x-1)(x+3)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .

c) Se consideră punctele  $A(-2, f(-2))$  și  $B(0, f(0))$ . Arătați că tangentele la graficul funcției  $f$  în punctele  $A$  și  $B$  au pantele egale.

### SIMULARE

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + x^4 - 2x + 2$ .

a) Arătați că  $f'(x) = e^x + 4x^3 - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ .

### Test6

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4(1-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 2$ , situat pe graficul funcției  $f$ .

### Test7

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-2)e^x$ .

a) Arătați că  $f'(x) = (x-1)e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{e^x - e}$ .

### Test8

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} + 4$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .

c) Arătați că funcția  $f$  este convexă.

### Test9

1. Se consideră funcția  $f: (-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+7}{x+5}$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3}{(x+5)^2}$ ,  $x \in (-5, +\infty)$ .

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

c) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției  $f$  în care tangenta la graficul funcției  $f$  este paralelă cu dreapta de ecuație  $y = 3x + 5$ .

### Test10

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{x^2} + \ln x - 2$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x=1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .

c) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)}{x^3 - 1} = -1$ .

### Test11

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 3$ .

a) Arătați că  $f'(x) = 2x^2(x-3)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^2 e^x}$ .

c) Arătați că  $f(x) \geq -\frac{21}{2}$ , pentru orice număr real  $x$ .

### Test12

1. Se consideră funcția  $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - \frac{x}{x+2}$ .

a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ ,  $x \in (-2, +\infty)$ .

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .

c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției  $f$ .