EXERCITIUL DAT la examen 2021

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

c) Demonstraţi că $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

TESTELE antrenament:

Model

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\leq(x-1)^2$, pentru orice număr real x.

Test1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{x^2+1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că dreapta de ecuaţie $y=2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Determinaţi punctele de inflexiune ale funcţiei f.

Test2

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1+\frac{3}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot f'(x)}{x-4}$.

Test3

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați imaginea funcției f.

Test4

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0) \\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

c) Arătați că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

Test5

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-\operatorname{arctg} x, & x\in(-\infty,0) \\ \frac{5x}{x^2+x+4}, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$.

c) Demonstrați că $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

Test6

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x^6+7}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-3x^2(x^3-1)(x^3+7)}{(x^6+7)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

c) Demonstrați că $|f(x)-f(y)|\le\dfrac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

Test7

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,0)$.

c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $[1,+\infty)$.

Test8

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

Test9

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

a) Arătați că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, pentru orice număr real x.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x$ este tangentă la graficul funcției f.

Test10

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x+a(x+1)$, unde a este număr real.

a) Arătați că $f'(x)=\ln x+1+a$, $x\in(0,+\infty)$, pentru orice număr real a.

b) Pentru $a=1$, determinați intervalele de monotonie a funcției f.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, funcția f este convexă.

Test11

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.

Test12

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

c) Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.