EXERCITIUL DAT la examen 2021

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a & 2^a\\ -2^a & 1-2^a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Arătați că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

c) Se consideră numerele naturale m și n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Arătați că $m=n=1$.

TESTELE antrenament:

Model

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=1$.

b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați numărul natural n, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.

Test1

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a & a-2\\ b+1 & b-1\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(A(1,0))=0$.

b) Demonstrați că, dacă $a\in(-\infty,0)$ și $b\in(0,+\infty)$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1,3)\cdot X=A(2,1)$.

Test2

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & -a & 1\\ 2 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+y-z=1\\ x-ay+z=3\\ 2x+ay-z=2\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=-3$.

b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.

c) Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.

Test3

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 4x+y+mz=9 \\ x+2y-z=4 \\ -2x-3y=-7 \end{cases}$, unde m este număr real.

a) Arătați că $\det(A(m))=m-10$, pentru orice număr real m.

b) Determinați inversa matricei $A(9)$.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real m, $m\neq 10$, dacă (a,b,c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a=b+c$.

Test4

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a,b)=aI_2+bA$, unde a și b sunt numere reale.

a) Arătați că $\det A=0$.

b) Demonstrați că $M(a,b)\cdot M(x,y)=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

c) Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B=M(x,2y)+M(y,2x)$ și $C=M(x\sqrt{2},1)\cdot M(y\sqrt{2},1)$ sunt egale, atunci $x^2+y^2=0$.

Test5

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

a) Arătați că $\det(A(4))=1$.

b) Demonstrați că $\det(A(a)\cdot A(1)-A(a+1))>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

c) Arătați că matricea $B(n)=A(1^2)+A(2^2)+A(3^2)+\ldots+A(n^2)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Test6

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+4y-az=1 \\ x+ay-z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=-3$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$.

Test7

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2ax+y+z=0 \\ x+2ay+z=1 \\ x+ay-z=-1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(-1))=-3$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

c) Determinați numărul întreg a, știind că există numerele reale y_0 și z_0 astfel încât $(1,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații.

Test8

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=-2$.

b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

c) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere întregi și $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a)\cdot X=A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.

Test9

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=2$.

b) Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.

Test10

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real și $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det(A(x))=6^{2x}$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot B=B\cdot A(x)$.

c) Demonstrați că orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are toate elementele numere întregi.

Test11

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(a,b)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(B(1,2))=-1$.

b) Arătați că $\det(A\cdot B(a,b))=0$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați numerele reale a și b pentru care $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

Test12

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=3$.

b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

c) Determinați numărul întreg k pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=kA(1)$.