EXERCITIUL DAT la examen 2021

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x-2 & -x\\ -2x & 4x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

1. Arătați că $\det A=2$.

2. Arătați că $xA-2I_2=B(x)$, pentru orice număr real x.

3. Arătați că $A\cdot A=B(5)$.

4. Determinați numerele reale x pentru care $\det(B(x))=4$.

5. Arătați că $B(xy)-xB(y)=2(x-1)I_2$, pentru orice numere reale x și y.

6. Determinați numărul real x pentru care $B(6^x)-2^x B(3^x)=6I_2$.

TESTELE antrenament:

Model

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1. Arătați că $\det(A(1))=8$.

2. Arătați că $A(0)\cdot A(2020)=3A(2020)$.

3. Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=-16$.

4. Arătați că $A(1)+A(2)+\ldots+A(10)=10A\left(\frac{11}{2}\right)$.

5. Determinați numărul natural m pentru care matricea $B=A(m)+A(m^2)$ **nu** este inversabilă.

6. Determinați perechile de numere întregi (a,b) pentru care suma elementelor matricei $A(a)\cdot A(b)$ este egală cu 2.

Test1

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1. Arătați că $\det(A(a))=9$, pentru orice număr real a.

2. Arătați că $A(0)\cdot A(2021)=3A(2021)$.

3 Arătați că $A(a-1)+A(a+1)=2A(a)$, pentru orice număr real a.

4. Determinați numerele naturale nenule m și n pentru care $A(m)\cdot A(n)=3A(3)$.

5. Determinați numărul real a pentru care $A(a^2)-2A(a)+A(1)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

6. Determinați numărul matricelor $A(k)$, unde k este număr întreg și $\det(k\cdot A(k))\leq 36$.

Test2

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}x & 3\\ 1 & x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

1. Arătați că $\det A=-3$.

2. Arătați că $A+M(6)=4\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

3 Arătați că $\det\left(M(x)\right)=(x+1)(x-3)$, pentru orice număr real x.

4. Determinați numerele întregi a pentru care $\det\left(A+M(2)\right)=9-a^2$.

5. Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(x)=4I_2$.

6. Determinați numărul natural n pentru care $M(n)+M(n+1)+M(n+2)=3M(2022)$.

Test3

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 3a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1. Arătați că $\det\left(A(2)\right)=-22$.

2. Arătați că $A(1)\cdot A(1)-3A(1)=4I_2$.

3. Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(x)\right)=-52$.

4. Arătați că $aA(1)-A(a)=(a-1)A(0)$, pentru orice număr real a.

5. Determinați numerele reale m pentru care $\det\left(A(m)+A(1)\right)=2$.

6. Determinați numărul natural nenul n pentru care $A(n)\cdot A\left(\frac{1}{n}\right)=A\left(\frac{1}{n}\right)\cdot A(n)$.

Test4

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Arătați că $\det A=-5$.

2. Arătați că $A\cdot B=5I_2$.

3. Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A-xI_2\right)=10$.

4. Arătați că suma elementelor matricei A^{-1} este egală cu -1, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $B\cdot X=-20I_2$.

6. Determinați numărul real x pentru care $A\cdot\left(B\cdot B-I_2\right)-\left(A\cdot A-I_2\right)\cdot B=x\left(B-A\right)$.

Test5

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=2xA-I_2$, unde x este număr real.

1. Arătați că $\det A=8$.

2. Arătați că $A\cdot A=-8I_2$.

3. Demonstrați că matricea $B(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

4. Determinați numărul real x pentru care $B(x)\cdot B\left(\frac{1}{2}\right)=9I_2$.

5. Arătați că $xB(x)-yB(y)=(x-y)B(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

6. Determinați numărul întreg k pentru care $B(1)-2B(2)+3B(3)-\ldots-20B(20)=kB(21)$.

SIMULARE

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(n)=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{de } n \text{ ori A}}$, unde n este număr natural nenul.

1. Arătați că $\det A=4$.

2. Arătați că $\det(A+xI_2)\geq 3$, pentru orice număr real x.

3. Arătați că există un număr real a, astfel încât $B(3)=aI_2$.

4. Determinați numerele reale m pentru care $\det(2mA+I_2)+2m\det(A-I_2)=0$.

5. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot M=M\cdot A$. Arătați că $x+y+3z-t=0$.

6. Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, matricea $B(6n)$ are toate elementele numere naturale.

Test6

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a & 2\\ b & -3\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

1. Arătați că $\det A=-1$.

2. Pentru $a=3$ și $b=-1$, calculați $3A-2B$.

3. Pentru $a=-3$ și $b=2$, arătați că $A\cdot B=B\cdot A$.

4. Determinați numerele reale a și b pentru care $B\cdot B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5. Arătați că $\det(A-B)\leq -3$, pentru orice numere naturale nenule a și b.

6. Arătați că, dacă numărul a este cu 5 mai mare decât numărul b, atunci $\det(A\cdot B+B\cdot A)=0$.

Test7

Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix}x & 1\\ -1 & x+y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

1. Arătați că $\det(A(-1,3))=-1$.

2. Arătați că $2A(1,1)-A(2,2)=A(0,0)$.

3. Arătați că $A(0,0)\cdot A(1,0)=A(-1,0)$.

4. Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x,1)-xA(1,1))=9$.

5. Demonstrați că $\det(A(x,y))+\det(A(y,x))\geq 2$, pentru orice numere reale x și y.

6. Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x,y)\cdot A(-y,-x)=A(0,-1)$.

Test8

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-8\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1. Arătați că $\det A=2$.

2. Arătați că $(A+B)\cdot(A+B)=24I_2$.

3. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2(X-A)=3(X-B)$.

4. Determinați numerele reale x pentru care $\det(A+xI_2)=2$.

5. Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $N=\det\left((1+n)A+(1-n)B\right)$ este natural, multiplu de 8.

6. Determinați numărul real x pentru care $A\cdot(A-xI_2)=B\cdot(B+xI_2)$.

Test9

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4&-1\\-1&3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a&1\\a&2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1. Arătați că $\det(M(1))=1$.

2. Arătați că $4M(2)-M(-1)=3M(3)$.

3. Arătați că $A\cdot A+7M(1)=24I_2$.

4. Arătați că matricea $A-2I_2$ este inversa matricei $M(1)$.

5. Determinați numerele reale a și b pentru care $M(1)+M(2)+M(3)+\ldots+M(9)=aM(b)$.

6. Arătați că $\det\left(M(a)\cdot M(b)-M(b)\cdot M(a)\right)\le 0$, pentru orice numere reale a și b.

Test10

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&2a\\2&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1. Arătați că $\det A=4$.

2. Pentru $a=-6$, arătați că $2A-B=4I_2$.

3. Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A=xA+yI_2$.

4. Arătați că suma elementelor matricei $B\cdot A$ **nu** depinde de a.

5. Determinați numerele naturale a pentru care numărul $\det(A+B)$ este pătratul unui număr natural.

6. Determinați numerele reale a pentru care $(B+aI_2)(B-aI_2)=aB$.

Test11

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 2a\\ 2 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1. Arătați că $\det A=4$.

2. Pentru $a=-6$, arătați că $2A-B=4I_2$.

3. Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A=xA+yI_2$.

4. Arătați că suma elementelor matricei $B\cdot A$ **nu** depinde de a.

5. Determinați numerele naturale a pentru care numărul $\det(A+B)$ este pătratul unui număr natural.

6. Determinați numerele reale a pentru care $(B+aI_2)(B-aI_2)=aB$.

Test12

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}2 & a\\ a^2 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1. Arătați că $\det A=9$.

2. Arătați că $A+X(2)=3X(1)$.

3. Arătați că $A\cdot A=6A-9I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. Arătați că matricea $M(a)=X(a)+X(-a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5. Determinați numerele naturale n pentru care matricea $B=X(-1)\cdot X(n)$ are toate elementele numere naturale.

6. Determinați numărul real a pentru care $\det\big(X(2a)-X(a)\big)=3$.