EXERCITIUL DAT la examen 2021

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x^2+x+3)f(x)\,dx=2$.

b) Arătați că $\int_1^2 g(x)\,dx=\ln\dfrac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.

c) Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

TESTELE antrenament:

Model

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

b) Arătați că $\int_0^1 \left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

c) Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.

Test1

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{4}{3}$.

b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

c) Arătați că $\int_{-1}^1 \left|x\ln(f(x))\right|dx=2\ln 2-1$.

Test2

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x^2+4)f(x)\,dx=0$.

b) Calculați $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

c) Demonstrați că $\int_1^x f(t)\,dt \ge 0$, pentru orice număr real x.

Test3

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^2 f^2(x)\,dx=4$.

b) Calculați $\int_0^1 \ln(f(x))\,dx$.

c) Demonstrați că există un singur număr real x, $x\in[0,+\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt=2021$.

Test4

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

b) Calculați $\int_0^1 e^x\left|f(x)\right|dx$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Test5

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\ln x$.

a) Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\frac{3}{4}$.

b) Calculați $\int_1^{e}x\left(x^3-f(x)\right)dx$.

c) Arătați că $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2e^3-5}{3}$.

SIMULAREA

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3-2\ln x$.

a) Arătați că $\int_1^{3}\left(f(x)+2\ln x\right)dx=14$.

b) Calculați $\int_1^{e}\left(2x+3-f(x)\right)dx$.

c) Arătați că $\int_0^{1}x^2f\left(x^3+1\right)dx=\frac{4(2-\ln 2)}{3}$.

Test6

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$.

a) Arătați că $\int_0^{1}\left(e^x f(x)-2\right)dx=-\frac{2}{3}$.

b) Calculați $\int_1^{e}f(\ln x)dx$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$. Calculați $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

Test7

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+1$.

a) Arătați că $\int_0^{1}f(x)dx=2$.

b) Calculați $\int_0^1 x^2 \left(f(x)\right)^3 dx$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \ln\left(f(t)\right) dt = +\infty$.

Test8

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

a) Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx = 7$.

b) Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

c) Știind că $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2(x+1)\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}+4$ este o primitivă a funcției f, arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)dx = 32$.

Test9

2. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{x^2}{x^2-4}$.

a) Arătați că $\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\frac{x^2}{x^2-4}\right)dx = \frac{5}{8}$.

b) Arătați că $\int_{-1}^1 \left(f(x)+f(-x)\right)dx = 4(1-\ln 3)$.

c) Determinați $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, pentru care $\int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x-f(x)}dx = \sqrt{3}-1$.

Test10

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx = 3$.

b) Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.

c) Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = 0$.

Test11

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

a) Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 1$.

b) Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

c) Demonstrați că $I_n \le \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n.

Test12

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$.

a) Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x}\,dx = 20$.

b) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c) Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f^n(x)\,dx = 0$.