EXERCITIUL DAT la examen 2021

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.

TESTELE antrenament:

Model

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+2x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

Test1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

Test2

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{-4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției f intersectează axa Oy.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(4)+f(6)+\ldots+f(2n)\right)^n$.

Test3

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

c) Demonstrați că $x-1\le 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$.

Test4

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\left(x^2+x+1\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

Test5

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{2(1-x)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}$.

c) Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}}\le\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x.

SIMULAREA

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $\sqrt{2}\le\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x.

Test6

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+3}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$.

Test7

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)$.

c) Demonstrați că graficul funcției f intersectează orice dreaptă paralelă cu axa Ox în cel mult un punct.

Test8

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln(x+1)$.

a) Arătați că $f'(x)=1+\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

c) Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției f, sunt concurente.

Test9

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x-3)-2\ln\left(x^2-9\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x\in(3,+\infty)$.

b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

c) Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\left((x-3)f(x)\right)=0$.

Test10

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)+3$.

a) Arătați că $f'(x)=2x\left(2x^2-13\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\dfrac{1}{30}$.

c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale .

Test11

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\ln x-x^2+3$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$.

b) Arătați că funcția f este convexă pe $(0,1)$.

c) Demonstrați că $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

Test12

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-ax$, unde a este număr real.

a) Pentru $a=0$, arătați că $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați numărul real a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu axa Ox.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.