**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4^3}=4=$ | **3p** |
| | $=2^2=(\log_3 9)^2\Rightarrow\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice | **2p** |
| **2.** | $f(-x)=-f(x)$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $g(-x)=(f(-x))^2=(-f(x))^2=(f(x))^2=g(x)$, pentru orice număr real $x$, deci funcția $g$ este pară | **3p** |
| **3.** | $2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x-2\cdot 2^x+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2^x\left(2^x-\sqrt{2}\right)-2\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0$ | **3p** |
| | $x=1$ sau $x=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| **4.** | $T_{k+1}=C_{10}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{10-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=C_{10}^k x^{\frac{3(10-k)}{2}-2k}=C_{10}^k x^{\frac{30-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,10\}$ | **3p** |
| | $\frac{30-7k}{2}=8\Leftrightarrow k=2$, deci $T_3=C_{10}^2x^8$ îl conține pe $x^8$ | **2p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, deci punctul $M$ este mijlocul segmentului $BC$ | **3p** |
| | $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{CM}$, deci $k=-2$ | **2p** |
| **6.** | $2\sin x\cos x+6\cos x-\sin x-3=0\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+3)-(\sin x+3)=0\Leftrightarrow(\sin x+3)(2\cos x-1)=0$ | **2p** |
| | $\sin x+3\neq 0$, deci $\cos x=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\frac{\pi}{3}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A=\begin{vmatrix}2&0&-1\\1&-1&0\\4&-1&-1\end{vmatrix}=2+1+0-4-0-0=$ | **3p** |
| | $=3-4=-1$ | **2p** |
| **b)** | Cum $\begin{vmatrix}-1&-1\\m-1&m\end{vmatrix}=-m+m-1=$ | **3p** |
| | $=-1\neq 0$, deci matricea $M(m)$ are rangul cel puțin egal cu $2$, pentru orice număr real $m$ | **2p** |
| **c)** | $M(m)\cdot A=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\m+2&-m-1&0\\-m-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $m=-2$, care convine | **2p** |
| **2.a)** | $(2+i)\circ(2-i)=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$ | **3p** |
| | $=4+4-i^2=9$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $A=-1+(a+1)i-1+(a-1)i+(-1+(a+1)i)(-1+(a-1)i)=$ | **2p** |
| | $=-2+2ai+1-(a-1)i-(a+1)i-(a^2-1)=-a^2<0$, pentru orice număr real nenul $a$ | **3p** |
| **c)** | $2z+z^2=-5 \Leftrightarrow z^2+2z+5=0$ | **3p** |
| | $z=-1-2i$ sau $z=-1+2i$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=(\ln(x+1)-\ln(x+3))'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=$ | **3p** |
| | $=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty$ | **3p** |
| | Dreapta de ecuație $x=-1$ este asimptota verticală la graficul funcției $f$ | **2p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to +\infty}(xf(x))=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^x=$ | **2p** |
| | $=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+3}}=\ln e^{-2}=-2$ | **3p** |
| **2.a)** | $\int_0^1\left(e^x f(x)-2\right)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right\|_0^1=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$ | **2p** |
| **b)** | $\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\left(\ln^2 x+1\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^e\left(\ln^2 x+1\right)\cdot(\ln x)'dx=\left.\left(\frac{\ln^3 x}{3}+\ln x\right)\right\|_1^e=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$ | **2p** |
| **c)** | $f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{e^x}\le 0$, pentru orice număr real $x$, deci $f$ este descrescătoare, de unde obținem că $f(1)\le f(x)\le f(0)$, pentru orice $x\in[0,1]$ | **2p** |
| | Pentru orice $x\in[0,1]$, $\frac{2}{e}\le f(x)\le 1 \Rightarrow \frac{2}{e}x^n\le x^n f(x)\le x^n$, deci $\frac{2}{e(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, de unde obținem că $\lim\limits_{n\to +\infty} I_n=0$ | **3p** |