Modele pentru rezolvarea problemelor şi redactarea soluţiilor

1. Să se calculeze următoarele limite ale funcţiei $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

Soluţie:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x-1} = \dfrac{7}{1} = 7$;

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x+1}{x-1} = \dfrac{1-1+1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2+x+1}{x-1} = \dfrac{3}{0_+} = +\infty$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2+x+1}{x-1} = \dfrac{3}{0_-} = -\infty$.

2. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} [\log_3(x-1) + \operatorname{arctg} x]$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\operatorname{arcctg} x)^{x^2-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to \infty} [-2x^2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-1)]$.

Soluţie:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \log_3(x-1) + \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \operatorname{arctg} x = -\infty + \dfrac{\pi}{4} = -\infty$;

b) $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} (\operatorname{arcctg} x)^{x^2-1}\right)^{\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-1)} = \pi^{\infty} = \infty$;

c) $\lim\limits_{x\to \infty} (-2x^2) + \lim\limits_{x\to \infty} \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -\infty - \infty = -\infty$.

3. Să se verifice dacă următoarele funcţii au limită în punctele indicate.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x - \sqrt{x}, x \ge 0 \\ \cos x, x < 0 \end{cases}, x_0 = 0.$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x^3+1, x \in (-\infty, 0] \\ 1+\sin x, x \in (0, \pi] \\ -\cos x, x \in (\pi, +\infty] \end{cases}, x_0 = 0, x_0 = \pi;$

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ e^{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

Soluție:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \cos x = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^x - \sqrt{x} = e^0 - \sqrt{0} = 1$.

Deci funcția are limită în $x_0 = 0$, deoarece $l_s = l_d$;

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x^3 + 1) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1 + \sin x) = 1 + 0 = 1$. Rezultă că g are limită în $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x<\pi}} 1 + \sin x = 1 + 0 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x>\pi}} (-\cos x) = 1$.

Rezultă că g are limită și în $x_0 = \pi$;

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0_-} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{x+1} = e$. Deci funcția h nu are limită în $x_0 = 0$, deoarece $l_s \neq l_d$.