# 3. Limite remarcabile. Cazuri de nedeterminare

**IMPORTANT!**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n)=\begin{cases}\infty, a_0>0\\ -\infty, a_0<0\end{cases}, n\in\mathbb{N}^*;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} \text{ pentru } n=m,\ b_0\neq 0\\ 0 \text{ pentru } n<m,\ n,m\in\mathbb{N}^*\\ +\infty \text{ pentru } n>m; a_0\cdot b_0>0\\ -\infty \text{ pentru } n>m; a_0\cdot b_0<0\end{cases};$

***Observaţie:*** Am văzut în paragraful precedent că la limita polinomală către $\pm\infty$ se păstrează termenii de grad maxim, se fac simplificările şi apoi se determină limita.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x^n}=\infty; n>0; a>1;$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log a^x}{x^n}=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{\log_a x}=\infty; n>0; a>1;$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}=\infty;$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0;$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b};$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}ax}{bx}=\dfrac{a}{b};$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin ax}{bx}=\dfrac{a}{b};$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}ax}{bx}=\dfrac{a}{b};$

***Observaţie:*** Dacă $u(x)\to 0$, atunci:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}u(x)}{u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}u(x)}{u(x)}=1.$$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0; a\neq 1;$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r;\ r\in\mathbb{R}.$

***Observație:*** Dacă $u(x)\to 0$, atunci:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a,\text{ unde } a>0 \text{ și } a\neq 1.$$

- **Cazuri de nedeterminare**

În mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$, următoarele operații nu au sens:

! $\boxed{\dfrac{0}{0};\ \dfrac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^0}$ !

Vom analiza cazurile: $\dfrac{0}{0};\ \dfrac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty.$

În cazurile de nedeterminare se folosesc anumite metode (factor comun forțat, descompunere în produs de factori, raționalizare, formule trigonometrice) sau anumite limite remarcabile, cum ar fi cele prezentate mai sus: a) – k).

Formulele b) – f) se utilizează, uneori, pentru eliminarea cazului $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Formulele g) – k) se folosesc pentru eliminarea nedeterminării $\dfrac{0}{0}$.