Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, ştiind că $a_2=3$ şi $a_3=5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n)=3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-9}=x-1$.

5p **4.** Determinaţi numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ și $Q(1,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele MN și PQ.

5p **6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=5$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b.

5p **b)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t\end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a=4$ și $b=0$, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.

2. Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $3*3=12$.

5p **b)** Demonstrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $(x^2+2x)*3=7$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel încât $x_1\le x_2$, atunci $g(x_1)\ge g(x_2)$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3 dx=\frac{1}{12}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n.