SUBIECT III , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

EXERCITIUL DAT la examen 2020

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+2}$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 (x^2+2x+2)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

b) Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

c) Arătați că $\displaystyle\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x+x$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\frac{1}{2}$.

b) Arătați că $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f(x^2)\,dx=\frac{e^4-e+3}{2}$.

c) Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1)=0$. Arătați că $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{5-3e}{3}$.

TESTELE antrenament:

Test 1

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$.

a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$.

c) Arătați că $\displaystyle\int_e^{e^2} x^2F(x)\,dx=\frac{3}{2}$.

SUBIECT III , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 2

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)e^x$.

a) Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=18$.

b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Determinaţi numărul natural nenul n, știind că $\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\frac{3\ln 2}{2}$.

Test 3

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

b) Calculaţi $\int_1^2 \frac{1}{x^2}f(x)\,dx$.

c) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

Test 4

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

a) Arătaţi că $\int_1^e f'(x)dx=1$.

b) Calculaţi $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}dx$.

c) Determinaţi numărul real p, $p>1$, știind că $\int_1^p x f(x)dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$.

SUBIECT III , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 5

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)-\dfrac{4}{x}\right)dx=4$.

b) Calculaţi $\int_2^6\dfrac{2}{f(x)}dx$.

c) Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că $\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\dfrac{e^2+1}{a}$.

Test 6

2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+x+1$ şi $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2x}{2x}$.

a) Demonstraţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Calculaţi $\int_1^4 g(x)dx$.

c) Determinaţi numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)dx=20$.

Test 7

2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+e^x+m$, unde m este număr real, şi $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+e^x+4x+1$.

a) Determinaţi numărul real m astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f.

b) Pentru $m=4$, calculaţi $\int_1^e f(x)\,dx$.

c) Pentru $m=0$, calculaţi $\int_1^2 x f(x)\,dx$.

SUBIECT III , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 8

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+3}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)\,dx=5$.

b) Calculați $\int_0^2 f(x)\,dx$.

c) Demonstrați că orice primitivă $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

Test 9

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_0^2 \dfrac{x+1}{f(x)}\,dx=e^2-1$.

b) Calculați $\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx$.

c) Se consideră numerele reale pozitive a, b și c. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \dfrac{f(x)}{x+1}\,dx$, $1-\int_0^b \dfrac{f(x)}{x+1}\,dx$ și $1-\int_0^c \dfrac{f(x)}{x+1}\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Test 10

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră funcția $f_n:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{x^n+1}$.

a) Determinați primitiva $G:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^3+1\right)f_3(x)$, știind că $G(0)=2020$.

SUBIECT III , exercitiul 2

b) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)dx \le \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Test 11

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx = 3$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x)+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)\ln x\,dx = e^2+a$.

Test 12

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.

a) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-2\ln(2x+1)\right)dx = \frac{1}{2}$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Dacă F este o primitivă a funcției f, arătați că $F(\pi)\le F\left(\frac{16}{5}\right)$.

SUBIECT III , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 13

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

a) Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

b) Calculați $\int_0^4\left(f(x)-f(-x)\right)dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>4$, astfel încât $\int_4^a\dfrac{f(x)}{x}dx=10+\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

Test 14

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_1^2(x+1)f(x)\,dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>1$, astfel încât $\int_1^a f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{a+1}{2}$.

Test 15

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e^x$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{3}{2}-e$.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n\left(x-f(x)\right)dx$. Demonstrați că $I_n+nI_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

SUBIECT III , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 16

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=2$.

b) Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

c) Determinați $a\in(1,+\infty)$ astfel încât $\int_0^x f(e^t)dt=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)+\ln(a-1)$, pentru orice număr real x.

Test 17

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

a) Arătați că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{10}{3}$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

c) Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției f.

Test 18

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cos x$.

a) Arătați că $\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{e^x}dx=0$.

b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

c) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx=-e^{\frac{\pi}{2}}\ln 2$.

SUBIECT III , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 19

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)\sin x$.

a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2}\,dx=1$.

b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

c) Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)}\,dx=\frac{1}{9}$.

Test 20

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

a) Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}\,dx$.

c) Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)\,dx-14\int_0^1 f^6(x)\,dx=128$.