SUBIECT III, exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

EXERCITIUL DAT la examen 2020

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

a) Arătați că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

c) Demonstrați că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.

TESTELE antrenament:

Test 1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-2}{x^2+5}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{10}$, pentru orice număr real x.

Test 2

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Demonstrați că graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$.

c) Demonstrați că ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.

SUBIECT III, exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

Test 3

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2 e^{-x}$.

a) Arătați că $f'(x)=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $0\le\dfrac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\le 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$.

Test 4

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x$.

c) Demonstrați că $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$.

Test 5

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-5$.

a) Determinați panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $e^x(1-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

Test 6

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Arătați că, pentru orice număr real a, $a>1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

Test 7

SUBIECT III, exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$.

Test 8

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \frac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$.

c) Demonstrați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

Test 9

1. Se consideră funcția $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=2$.

b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$.

c) Determinați $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$.

Test 10

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$.

a) Arătați că $f'(x)=\sqrt{x}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$.

c) Demonstrați că $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\ge -1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

Test 11

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $g'(x)+g(x)=\dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f''(x)$.

Test 12

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(-x)}{\ln x}$.

Test 13

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

a) Arătați că $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$, situat pe graficul funcției f.

c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f.

Test 14

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0,+\infty)$.

Test 15

SUBIECT III, exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – ȘTIINȚE ALE NATURII -

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-(x+1)\ln(x+1)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.

b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Demonstraţi că funcţia f este concavă.

Test 16

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x-5)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

c) Arătaţi că $e^{2x}\le\dfrac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$.

Test 17

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Demonstraţi că $\ln x\ge\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.

Test 18

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Se consideră dreapta d, asimptota spre $+\infty$ la graficul lui f. Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d.

c) Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$.

Test 19

SUBIECT III, exercitiul 1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(2^x+1\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=1-\dfrac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este crescătoare.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

Test 20

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-n\ln x+1$, unde n este număr natural nenul.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{n\left(x^n-1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^n}{x}=0$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție în intervalul $(0,1]$.