SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

EXERCITIUL DAT la examen 2020

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln\dfrac{x-1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $\dfrac{1}{x-2}>\ln\dfrac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

TESTELE antrenament:

Test 1

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-2\left(3x^2-3x+1\right)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$.

Test 2

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-x(x+2)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+\ldots+g(n)\right)=\dfrac{1}{e-1}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{(x+2)^2}$.

Test 3

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln\left(x^2+1\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

Test 4

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox.

Test 5

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+1\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=e^x(x-3)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2020$.

c) Determinați valorile reale ale lui a, știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=a$ în exact trei puncte.

Test 6

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

a) Arătați că $f'(x)=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(f(n))^n}{e^n(f(n+1))^n}$.

c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte.

Test 7

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați $m\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M(m,f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x$.

c) Demonstrați că $x\ln x+\dfrac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

Test 8

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

c) Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte.

Test 9

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

a) Arătați că $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))$.

Test 10

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)+1$.

a) Arătați că $f'(5)=6$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

c) Demonstrați că ecuația $f'(x)=0$ are trei soluții reale.

Test 11

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln\left(x^2+1\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f.

c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte.

Test 12

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.

a) Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

c) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$.

Test 13

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(e^x+x-1\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-2}{e^x+x-1}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Demonstrați că dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați imaginea funcției f.

Test 14

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)$.

Test 15

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{3(x+1)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

c) Demonstrați că $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x.

Test 16

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}$.

c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

Test 17

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\left(e^x-e\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Determinați punctul de extrem al funcției f.

SUBIECT III , exercitiul 1

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

Test 18

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b) Determinați numărul real $a\in(-1,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+2020$.

c) Demonstrați că $(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

Test 19

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

c) Arătați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

Test 20

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$.

c) Determinați imaginea funcției f.