

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

EXERCITIUL DAT la examen 2020

2. Pe mulțimea $A = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$.

a) Arătați că $1 * 2020 = 1$.

b) Demonstrați că $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1) + 1}$, pentru orice $x, y \in A$.

c) Determinați $x \in A$ pentru care $x * x = x$.

EXERCITIUL DAT la sesiunea speciala 2020

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2(2^x + 2^y)$.

a) Arătați că $0 * 0 = 1$.

b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.

c) Determinați numărul real x pentru care $(x * x) * x = 3 + \log_2 3$.

TESTELE antrenament:

Test 1

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

a) Arătați că $x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y .

b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 14$

c) Determinați numărul natural n , știind că $\left(2^n + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+1} + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+2} + \frac{3}{2}\right) = 2^{20} + \frac{3}{2}$.

Test 2

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - \sqrt{3}(x + y) + 3 + \sqrt{3}$.

a) Arătați că $\sqrt{3} * 0 = \sqrt{3}$.

b) Demonstrați că $x * y = (x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y .

c) Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \dots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

Test 3

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -\frac{3}{5}xy + x + y$.

a) Arătați că $x * y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y .

b) Arătați că $\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} \geq \frac{5}{3}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

c) Calculați $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * \dots * \frac{2020}{3}$.

Test 4

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y})^5$.

a) Arătați că $2^5 * 3^5 = 5^5$.

b) Determinați numărul real x , știind că $2^5 * x^5 * (243x^5) = 100000$.

c) Se consideră numerele $M = 1^5 * 2^5 * \dots * 10^5$ și $N = 5^5 \cdot 11^5$. Demonstrați că $M - N = 0$.

Test 5

2. Pe mulțimea $M = (-10, 10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{100(x+y)}{xy+100}$.

a) Arătați că $3 * 0 = 3$.

b) Se consideră $f: M \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.

c) Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori } x} = 0$.

Test 6

2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.

a) Arătați că $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$, pentru orice $x, y \in G$.

b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.

c) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f: M \rightarrow G$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul (M, \cdot) la grupul $(G, *)$, unde $M = (0, +\infty)$ și „ \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

Test 7

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

a) Arătați că $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.

b) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.

c) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f : G \rightarrow M$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (M, \cdot) , unde $M = (0, +\infty)$ și „ \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

Test 8

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{3}$.

a) Arătați că $1 * 3 = 3$.

b) Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = \frac{26}{9}$.

c) Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „*” sunt numere naturale.

Test 9

2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy}{x + y}$.

a) Arătați că $2 \circ 2 = 1$.

b) Demonstrați că $x \circ y \circ z = (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^{-1}$, pentru orice $x, y, z \in M$.

c) Demonstrați că $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} = \frac{1}{54}$.

Test 10

2. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru

$$x * y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$$

a) Arătați că $2 * 64 = 4$.

b) Arătați că legea de compoziție „*” este comutativă.

c) Determinați $x \in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „*”.

Test 11

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12$.

- Arătați că $x * 1 = 3$, pentru orice număr real x .
- Determinați numărul real x pentru care $0 * x = -9$.
- Demonstrați că, dacă $x * y = 3$, atunci $(x-1)(y-1) = 0$.

Test 12

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2020}$.

- Arătați că $x * (-x) = \sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x .
- Determinați numerele reale x pentru care $(x+1) * (-x) = \sqrt[3]{2021}$.
- Demonstrați că, pentru orice număr real a , există un unic număr real x pentru care $x * x * x = a$.

Test 13

2. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = 2^{\ln x \cdot \ln y}$.

- Arătați că $x * 1 = 1$, pentru orice $x \in G$.
- Determinați $f \in G$, știind că f este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- Determinați $x \in G$ pentru care $x * \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Test 14

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.

- Arătați că $(1+i) \circ (2-i) = 6+i$.
- Demonstrați că numărul $z \circ \bar{z}$ este număr real, pentru orice număr complex z .
- Determinați numerele complexe z pentru care $z \circ z = -2$.

Test 15

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.

- Arătați că $1 * 2 = 13$.
- Determinați numerele reale x pentru care $(x * x) * x^2 = 61$.
- Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.

Test 16

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + a$, unde a este număr real.

- a) Determinați numărul real a pentru care $(-1) * 1 = 0$.
- b) Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru.
- c) Demonstrați că, dacă $a \in [12, +\infty)$, atunci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

Test 17

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$.

- a) Arătați că $2 * (-1) = 23$.
 - b) Demonstrați că $e = -4$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
 - c) Pentru $r \in \{0, 1, 2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu 3.
3. Determinați numerele $r \in \{0, 1, 2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

Test 18

2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6$.

- a) Arătați că $1 * 1 = 3$.
- b) Arătați că $x * y \neq 2$, pentru orice numere raționale x și y .
- c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 3$.

Test 19

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\bar{z}_1 - \frac{1}{2}\bar{z}_2$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .

- a) Arătați că $(1 + i) \circ (1 - i) = 1$.
- b) Se consideră $H = \{2 + bi \mid b \in \mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- c) Se consideră numărul complex z_0 . Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0 \circ z$ este real.

Test 20

SUBIECT II , exercitiul 2

TESTE DE ANTRENAMENT Bacalaureat 2020 – MATEMATICA INFORMATICA

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

a) Arătați că $2 * (-2) = 0$.

b) Verificați dacă $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.

c) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$. Arătați că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .