

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{11} - \sqrt{5})(\sqrt{11} + \sqrt{5}) = 11 - 5 =$ $= 6 = (\sqrt{6})^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	2p 3p
2.	$f(-x) = \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} =$ $= -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$, pentru orice $x \in (-1, 1)$, deci funcția f este impară	3p 2p
3.	$4 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2 \cdot 2^x + 3) = 0$ Cum $2^x > 0$, pentru orice număr real, obținem $2^x = \frac{1}{2}$, deci $x = -1$	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7\}$ este $A_4^3 =$ $= \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$	3p 2p
5.	$m_{BC} = 1$ și, cum $AD \parallel BC$, obținem $m_{AD} = 1$ Ecuația dreptei AD este $y + 2 = x + 1$, deci $y = x - 1$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$, deci $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ $\sin C = 2 \sin B$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{vmatrix} = -3a + 8 + 0 - 6 - 0 + 4a =$ $= -3a + 4a + 8 - 6 = a + 2$ pentru orice număr real a	2p 3p
b)	$\det(A(0)) = 2 \neq 0$ $A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	Pentru $a \neq -2$, obținem $\det(A(a)) \neq 0$, deci sistemul este Cramer Soluția sistemului de ecuații este $(1, -1, 0)$	2p 3p
2.a)	$x * (-2) = 5(x + 2)(-2 + 2) - 2 =$	3p

	$= 0 - 2 = -2$, pentru orice număr real x	2p
b)	$f(x) * f(y) = 5(f(x)+2)(f(y)+2) - 2 = 5\left(\frac{e^x - 10}{5} + 2\right)\left(\frac{e^y - 10}{5} + 2\right) - 2 =$ $= 5 \cdot \frac{e^x}{5} \cdot \frac{e^y}{5} - 2 = \frac{e^{x+y} - 10}{5} = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$x * x = 5(x+2)^2 - 2$, $x * x * x = 25(x+2)^3 - 2$ $25(x+2)^3 - 2 = 23 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 1$, deci $x = -1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 =$ $= \frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x+5} - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 0$, adică axa Ox , este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x+2 = \sqrt{x^2+4x+5} \Rightarrow x^2+4x+4 = x^2+4x+5 \Rightarrow 4 = 5$, fals, deci $f'(x) \neq 0$, pentru orice număr real x f' are proprietatea lui Darboux, deci f' are semn constant și, cum $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 < 0$, obținem că $f'(x) < 0$, pentru orice număr real x , deci f este descrescătoare și, cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și f este continuă, obținem $\text{Im } f = (0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$F'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x^2-1)(x+1) - x^2}{x^2(x+1)} =$ $= \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)} = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	3p 2p
b)	$\int_1^2 (x+1)f(x) dx = \int_1^2 \frac{x^3 - x - 1}{x^2} dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{1}{x}\right) \Big _1^2 =$ $= 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \ln 1 + 1\right) = 1 - \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_1^a f(x) dx = F(x) \Big _1^a = F(a) - F(1) = \frac{a^2+1}{a} - \ln(a+1) - 2 + \ln 2 = \frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2$ $\frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \ln \frac{a+1}{2}$, deci $\frac{a^2+1}{a} = \frac{5}{2}$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p